

AZ.

BIBLIOTECA NAZ.
Vittorio Emanuele III

XXXIV

E

119

NAPOLI

GEOMETRIA PIANA



GEOMETRIA PIANA

DI

GIUSEPPE MESSI

Per uso delle scuole Tecniche, Ginnasiali, Liceali,
e Magistrali, non che per gli esami d'ammissione
alla Regia Militare Accademia ed alle scuole su-
periori di Fanteria e Cavalleria.

NAPOLI

STAMPERIA DELL'INDUSTRIA DI M. LOMBARDI

Vico S. Geronimo a S.^a Chiara, 5.

1870



L'Autore si riserva i dritti sulla proprietà letteraria
giusta le leggi vigenti.

Le copie non munite della sua firma si terranno come
contraffatte.

G. Maffei



GEOMETRIA PIANA

DEFINIZIONI

La Geometria è la scienza che esamina le proprietà dell'estensione, quindi ne ottiene la misura e ne valuta i rapporti.

L'estensione ha tre dimensioni: *lunghezza, larghezza e profondità o altezza.*

Queste dimensioni, non solo sono sempre riunite in tutti gli oggetti che ci circondano; ma ancora lo spazio, sia occupato da qualunque corpo, sia vuoto, presenta anch'esso le medesime tre dimensioni.

La linea, è una lunghezza senza larghezza, le sue estremità si chiamano punti; il punto non ha alcuna dimensione.

La linea, può essere: *retta, curva e spezzata o poligonale.* È retta, quando percorre nello spazio seguendo sempre la stessa direzione, ed è perciò il più corto cammino da un punto ad un altro. È curva, quando fra due punti prende una direzione tutta differente della retta in modo da seguire un contorno speciale. È spezzata o poligonale, quando è composta da linee rette.

Così: AB (*fig. 1*) è una linea retta, poichè percorre nello spazio seguendo sempre la stessa direzione ed è la più corta linea che possa esistere fra i punti A e B. La linea DCE (*fig. 2*) è una linea curva, poichè prende una direzione tutta differente della retta seguendo un contorno speciale. La linea FGHIL (*fig. 3*) è una linea spezzata, poichè è composta da linee rette.

La linea retta, è *verticale*, quando s'immagina di prendere la direzione di un filo a piombo; è *orizzontale*, quando giace in modo che non inclina nè a destra, nè a sinistra verso uno dei punti della verticale.

La verticale e l'orizzontale sono scambievolmente perpendicolari. Una retta poi che incontra altra retta in qualunque posizione essa stia in modo da formare due angoli eguali, si dice perpendicolare a questa linea.

Le *oblique* o *traverse*, sono quelle rette che inclinano o dalla parte destra o dalla parte sinistra verso i punti di una perpendicolare.

Immaginando che la retta AB (*fig. 4*) prenda la direzione di un filo a piombo essa dicesi perpendicolare o verticale; la CD (*fig. 5*) è orizzontale, perchè giace in modo che non inclina nè a destra nè a sinistra verso uno dei punti della verticale; la retta IL (*fig. 6*) dicesi perpendicolare ad MN perchè forma con essa due angoli eguali; finalmente le due rette GH ed EF (*fig. 7*) si dicono oblique, perchè una inclina a destra e l'altra a sinistra verso i punti della notata perpendicolare AB.

Due linee si dicono *parallele*, quando hanno tutti i loro punti equidistanti, e prolungandole indefinitamente o dall'una o dall'altra parte, conservano sempre la medesima equidistanza in tutti i loro punti; quindi giammai s'incontrano.

Le parallele possono essere: rette, curve e spezzate, perchè l'equidistanza de' punti può osservarsi in qualunque linea; però nelle curve e più particolarmente nelle spezzate, bisogna provare, allorquando son prolungate o dall'una o dall'altra parte, che han conservato sempre la medesima equidistanza.

Le due rette AB e CD (*fig. 8*) le due curve GH ed IL (*fig. 9*) le due spezzate OP e QR (*fig. 10*) sono ciascuna a ciascuna parallele, perchè hanno tutti i loro punti equidistanti.

La *superficie*, è tutto ciò che ha lunghezza e larghezza, senza grossezza o altezza, ovvero è il limite di un corpo che lo separa dallo spazio che lo circonda.

La superficie, può essere: o *piana*, o *curva*, o *polie-*

drica. È piana, quando presi su di essa due punti ad arbitrio e congiuntili per mezzo di una linea retta, questa giace interamente su di essa. È curva, quando presenta il limite di un corpo voltato ad arco. È poliedrica, quando è composta da varie superficie piane.

La superficie curva, può essere: *concava* o *convessa*. È concava, quando presenta cavità di un corpo. È convessa, quando presenta l'esterno del corpo voltato ad arco.

Chiamasi *solido* o *corpo*, tutto ciò che riunisce le tre dimensioni dell'estensione: lo spazio che i corpi o solidi occupano, dicesi: *volume*.

I solidi sono terminati da facce, le quali, come sopra si è detto, si dicono superficie. Il luogo dove le superficie di due corpi s'incontrano chiamasi linea.

Il nome di figura, si dà: ai volumi, alle superficie ed alle linee.

Lo spazio compreso dalla scambievole inclinazione di due rette che vanno ad unirsi in un punto, si chiama: *angolo*. Il punto d'incontro delle due rette, che compongono l'angolo, dicesi *vertice*, e le due rette *lati* dell'angolo.

Gli angoli si dinotano talvolta con la sola lettera del vertice e talvolta con le tre lettere dei lati, badando però, di far cadere nel mezzo delle altre due quella che indica il vertice.

Gli angoli, come tutte le altre quantità, sono capaci di Addizione, Sottrazione, Moltiplicazione e Divisione, e ve ne sono di tre specie, cioè: *retti*, *acuti* ed *ottusi*.

L'angolo retto, è quello che ha i lati scambievolmente perpendicolari. L'angolo acuto, è quello che ha lo spazio fra i suoi lati minore di quello del retto. L'angolo ottuso è quello che ha lo spazio compreso fra i suoi lati maggiore di quello del retto.

L'angolo BAC è retto perchè ha i suoi lati BA e CA (fig. 11) scambievolmente perpendicolari; l'angolo EDF è acuto, perchè lo spazio compreso fra i suoi lati ED ed FD (fig. 12) è minore di quello del retto; l'angolo GHI è ottuso, perchè lo spazio compreso fra i suoi lati GH ed IH (fig. 13) è maggiore di quello del retto.

Si chiamano angoli *supplementari*, due angoli che uniti insieme formano due angoli retti; e *complementari* due angoli che uniti insieme formano un angolo retto.

Se due angoli hanno un lato di comune e lo stesso vertice, diconsi: *adiacenti*.

Gli angoli NOM ed MOP (*fig. 14*) oltre di chiamarsi angoli supplementari, perchè la loro somma eguaglia quella di due retti, si chiamano ancora angoli adiacenti, perchè hanno di comune il lato OM e lo stesso vertice O.

Gli angoli RSX ed XST (*fig. 15*) si dicono complementari, perchè la loro somma è eguale ad un retto e sono parimente adiacenti, perchè hanno il lato XS di comune e lo stesso vertice S.

Due linee rette, che partono da due punti diversi e vanno ad incontrarsi in uno stesso punto, in modo da non formare una sola retta continuata verso il punto d'incontro, si chiamano: *convergenti*; e quelle che partono da un medesimo punto senza formare una sola retta continuata e senza potersi più incontrare, chiamansi: *divergenti*.

Immaginando che le due rette BA e CA (*fig. 16*) partano dai due punti diversi B e C e vanno ad incontrarsi nello stesso punto A, in modo da non formare una sola retta continuata verso il punto d'incontro, si chiamano: *convergenti*; e quelle che partano dallo stesso punto H (*fig. 17*) senza mai più incontrarsi, diconsi: *divergenti*.

Il *poligono* è un piano terminato da ogni parte da linee rette, le quali unite formano il *contorno* o *perimetro* del poligono. Ogni poligono ha tanti angoli quanti sono i lati. Un poligono che ha lati ed angoli eguali dicesi regolare, se al contrario irregolare.

ABCDE essendo un piano terminato da linee rette (*fig. 18*) chiamasi poligono, ma è irregolare perchè ha angoli e lati disuguali; il piano TRSUVZ (*fig. 19*) è un poligono regolare perchè ha lati ed angoli eguali.

Possono esserci infiniti poligoni; ma il più semplice di tutti è quello di tre lati, che chiamasi *triangolo*; quello di quattro lati, *quadrilatero*; quello di cinque *pentagono*; quello di sei, *esagono*, ecc.

I triangoli si distinguono in rapporto ai lati ed in rapporto agli angoli.

In rapporto ai lati, il triangolo è *equilatero* quando ha i suoi tre lati eguali; è *isoscele*, quando ha due soli lati eguali; è *scaleno*, quando ha tutti i tre lati disuguali.

Il triangolo ABC (*fig. 20*) è equilatero e nel tempo stesso è anche equiangolo, perchè ha tutti i tre lati e tutti i tre angoli eguali. Il triangolo DEF (*fig. 21*) è isoscele perchè ha due soli lati eguali cioè: DE e DF. Il triangolo GHI (*fig. 22*) è scaleno, perchè ha tutti i tre lati disuguali. Tanto DEF che GHI sono triangoli irregolari, mentre il primo ABC è regolare.

In rapporto agli angoli, il triangolo è *rettangolo*, quando ha un angolo retto, è *ottusangolo*, quando ha un angolo ottuso ed *acutangolo*, quando ha tutti i tre angoli acuti. Nel triangolo rettangolo il lato opposto all'angolo retto si chiama *ipotenusa*, e gli altri due lati diconsi *cateti*.

Il triangolo ABC (*fig. 23*) è rettangolo, perchè ha l'angolo B retto; il lato AC che si oppone a questo angolo chiamasi *ipotenusa*, ed i due lati AB e BC che formano l'angolo retto ABC, si chiamano *cateti*. Il triangolo DEF (*fig. 24*) è ottusangolo, perchè ha l'angolo E ottuso, ed il triangolo GHM (*fig. 25*) è acutangolo, perchè ha tutti i tre angoli acuti.

Quindi ne nasce: che il triangolo acutangolo, può essere o equilatero, o isoscele, o scaleno; il triangolo rettangolo, può essere o isoscele o scaleno; il triangolo ottusangolo può essere similmente, o isoscele o scaleno.

Vi sono infinite specie di quadrilateri e fra questi sono da notarsi: il *quadrato*, che ha i quattro lati eguali e gli angoli retti; il *rettangolo*, che ha gli angoli retti senza i lati eguali; il *parallelogrammo* o *romboide*, che ha i lati opposti paralleli; la *losanga* o *rombo*, che ha i lati eguali e gli angoli disuguali; il *trapezio*, che ha soltanto due lati opposti paralleli.

Il quadrilatero ABCD (*fig. 26*) è un quadrato, perchè ha i quattro lati eguali e gli angoli retti. DEFG (*fig. 27*) è un rettangolo perchè ha gli angoli retti senza avere i

lati eguali. ILNH (fig. 28) è un parallelogrammo, perchè ha i lati opposti paralleli senza avere nè lati, nè angoli eguali. PQRS (fig. 29) è una losanga, perchè ha come il quadrato i lati eguali, senza avere però gli angoli retti. Finalmente MNRP (fig. 30) è un trapezio, perchè ha soltanto due lati opposti paralleli.

Qualunque retta, come AD (fig. 31) che congiunge in un poligono i vertici di due angoli non consecutivi quali sono nel poligono ABCDE i due A e D, si chiama *diagonale*.

In generale, chiamasi poligono equilatero, quello che ha tutti i lati eguali, e poligono equiangolo, quello che ha tutti gli angoli eguali.

Due poligoni si dicono equilateri tra loro, quando hanno i lati eguali ciascuno a ciascuno e situati nel medesimo ordine, in modo che, seguendo il loro contorno in uno stesso verso, i lati del primo poligono, siano eguali a quelli del secondo; s'intende lo stesso rispetto agli angoli perchè due poligoni potessero dirsi equiangoli tra loro. In tutti e due i casi tanto i lati eguali, che gli angoli eguali, si chiamano: *lati o angoli omologhi*. Due poligoni di eguali lati si dicono ancora *isoperimetri*.

Allorquando una retta tirata comunque si voglia non incontra il perimetro di un poligono che in due soli punti, questo poligono chiamasi ad *angoli sporgenti* o *convesso*; se poi l'incontra in più di due punti, allora si chiama poligono ad *angoli rientranti*. Nella figura ABCDE la retta OP (fig. 31) incontrando in qualunque modo questo poligono in due soli punti, esso dicesi convesso o ad angoli sporgenti. Nel poligono MINOPR la retta XZ (fig. 32) incontrando il perimetro in più di due punti, questo poligono dicesi ad angoli rientranti.

La perpendicolare, abbassata dal centro, sui lati di un poligono, chiamasi *apotema*.

Due rette qualunque intersecate da una terza formano diverse coppie di angoli, che prendono varie denominazioni.

Così le due rette AB e CD che vengono secate dalla terza EF (fig. 33) gli angoli che esse formano, prendono

i seguenti nomi, cioè: gli angoli AGO e GOC *interni* da una medesima parte, e lo stesso nome prendonogli altri due angoli BGO e GOD; gli angoli AGO e GOD *alterni-interni* o semplicemente *alterni*, così ancora BGO e GOC; gli angoli EGB e GOD *interni-esterni* o *corrispondenti* e lo stesso AGE e COG; gli angoli AGE ed FOD *alterni-esterni* e lo stesso EGB e COF.

Si chiama *proiezione* di una retta sopra un'altra, la porzione compresa su questa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi dell'altra.

La porzione EF (*fig. 34*) compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate dagli estremi della retta AB sopra CD, è la proiezione della retta AB sulla CD.

Chiamasi *bisettrice*, la retta che tirata dal vertice di un angolo lo divide in due parti eguali.

Chiamasi *mediana*, la retta che parte da un vertice di un triangolo e divide il lato opposto per metà.

Chiamasi *luogo geometrico*, una linea retta o curva di cui tutti i loro punti hanno una comune proprietà.

Il *cerchio*, è una superficie terminata da una linea curva, tutti i punti della quale sono equidistanti da un punto preso nell'interno della figura. Questo punto si chiama *centro*; la curva che limita questa figura dicesi *circonferenza del cerchio* o semplicemente *circonferenza*.

Lo spazio terminato dalla linea curva ABC (*fig. 35*) chiamasi *cerchio*, e tutti i punti di questa linea, la quale si chiama *circonferenza*, sono egualmente distanti dal punto M preso nell'interno della figura che si chiama *centro*.

Ogni retta condotta dal centro alla circonferenza si chiama *semidiametro* o *raggio*, ed ogni retta che passa pel centro ed ha le sue estremità sulla circonferenza si chiama *diametro*.

Tutti i raggi di un medesimo cerchio sono eguali tra loro, come pure, tutti i diametri, i quali sono doppi dei raggi.

Si chiama *arco*, una porzione di circonferenza che

viene tagliata da una retta, la quale condotta nel cerchio ne congiunge le estremità, questa retta si chiama *corda* e se dal punto medio di essa s'innalzi una perpendicolare in modo che divida l'arco sotteso in due parti eguali; questa perpendicolare, si chiamerà: *sætta*.

La retta MN (*fig. 36*) condotta dal centro alla circonferenza si chiama semidiametro o raggio, ed ogni retta OR che passa pel centro M ed ha le sue estremità OR, sulla circonferenza si chiama diametro.

La porzione OCB di circonferenza che viene tagliata dalla corda OB la quale si chiama puranche sottesa, dicesi arco; la perpendicolare DC innalzata dal punto medio D della corda OB e che divide l'arco in due parti eguali, prende il nome di *sætta*.

Se la retta OB, la quale, come si è detto, taglia una porzione di circonferenza ed ha nome di corda, passasse pel centro, prenderebbe il nome di diametro; quindi il diametro di un cerchio, è la massima corda che possa tracciarsi in esso.

Segmento, è quella porzione di cerchio, compresa tra un'arco e la sua corda.

Settore, è una porzione di cerchio compresa tra un arco e i due raggi condotti all'estremità di questo stesso arco.

Retta iscritta nel cerchio, è quella, che ha i suoi estremi sulla circonferenza, sicchè tutti i diametri e tutte le corde tirate in uno stesso cerchio, si dicono iscritti in quel cerchio.

Lo spazio compreso tra la corda BD (*fig. 37*) e l'arco BCD si chiama segmento, e la porzione di cerchio compresa tra l'arco MG ed i due raggi OM ed OG si chiama settore. Or la corda BD, si chiama ancora retta iscritta, perchè ha le sue estremità sulla circonferenza.

Chiamasi *angolo iscritto*, quello che ha il suo vertice sulla circonferenza ed i suoi lati sono due corde. Il *triangolo iscritto*, è quello che ha i suoi tre angoli sulla circonferenza di modo che i suoi lati sono tre corde. In generale, si chiama *figura iscritta*, quella che ha i vertici dei suoi angoli situati sulla circonferenza ed i suoi lati

sono altrettante corde. Nello stesso tempo si dice che il cerchio è circoscritto alla medesima figura.

L'angolo BAC è iscritto (*fig. 38*) perchè ha il vertice A collocato sulla circonferenza ed i suoi lati sono due corde dello stesso cerchio. Similmente il triangolo ACD è iscritto, perchè i vertici dei suoi tre angoli sono collocati sulla circonferenza ed i lati che ne formano il contorno o perimetro sono tre corde dello stesso cerchio. Il pentagono ACDEF è anche iscritto, perchè tutti i vertici dei suoi angoli sono situati sulla circonferenza e tutti i suoi lati sono altrettante corde dello stesso cerchio.

Si chiama *segante*, quella retta che incontra la circonferenza in due punti, ma i suoi estremi non si posano su di essa e passano dall'una e dall'altra parte. Può ancora essere segante quella retta che ha uno dei suoi estremi sulla circonferenza e l'altro al di fuori.

Tangente è quella retta che ha un sol punto di comune con la circonferenza. Parimente due circonferenze sono tangenti l'una all'altra quando hanno un sol punto di comune. Esse possono essere tangenti tanto internamente quanto esternamente secondo che, l'una giace o internamente o esternamente dell'altra.

La retta AB (*fig. 39*) è una segante perchè taglia la circonferenza in due punti, ed MN è una tangente perchè ha il solo punto O di comune con la circonferenza: questo punto, chiamasi: *punto di contatto*.

Le due circonferenze LMN ed LOP (*fig. 40*) che hanno un solo punto di contatto L, sono tangenti internamente perchè una giace dentro l'altra. E le due circonferenze DCE e DGH (*fig. 41*) che hanno un sol punto di contatto D, sono tangenti esternamente, perchè l'una giace esternamente dell'altra.

Un poligono si dice *circoscritto* ad un cerchio quando tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza e nel tempo stesso il cerchio si dice *iscritto* nel poligono.

Si chiamano *circoli concentrici* quelli descritti nello stesso piano e aventi di comune il centro. Le circonfere-

renze de' circoli concentrici sono parallele. Si chiamano poi circoli *eccentrici* quelli descritti nello stesso piano senza avere di comune il centro.

Il poligono ABCDE (*fig. 42*) si dice *circoscritto* al cerchio perchè tutti i suoi lati sono tangenti alla circonferenza, quindi si dice nel tempo stesso che il cerchio è iscritto nel poligono ABCDE.

Tutti i cerchi che hanno di comune il punto O come centro (*fig. 43*) si dicono *concentrici*; e quelli che non hanno di comune il centro, come GHI ed ORS (*fig. 44*) si chiamano *cerchi eccentrici*. La *corona circolare*, è la superficie compresa fra due circoli concentrici.

L'*aia* di una figura è la misura della superficie di questa figura.

Le *figure equivalenti* sono quelle che hanno le superficie eguali, or due figure possono essere equivalenti quantunque di forme differenti, poichè un parallelogrammo può benissimo essere equivalente ad un triangolo, questo ad un rettangolo ecc. senza avere perciò lo stesso contorno, quindi dissimili in figura.

Generalmente, le *figure eguali*, sono quelle che poste le une sopra le altre coincidono in tutta la loro estensione, e le *figure simili*, sono quelle che hanno gli angoli eguali ciascuno a ciascuno ed i lati omologhi proporzionali.

Due figure eguali sono sempre simili, ma due figure simili, possono non essere eguali.

Nei cerchi diversi, archi simili, settori simili e segmenti simili, si dicono quelli che corrispondono ad angoli eguali e che hanno i loro vertici al centro.

L'*altezza* di un parallelogrammo, è la perpendicolare innalzata dalla base sul lato opposto; lo stesso è pel rettangolo e pel quadrato, però in questi due ultimi può essere ancora uno dei loro lati.

L'*altezza* di un triangolo, è la perpendicolare abbassata sulla base dal vertice.

L'*altezza* di un trapezio è la perpendicolare condotta tra i suoi lati paralleli.

Assiomi e spiegazione di alcuni termini.

Si è detto in Aritmetica¹ che ogni scienza astratta si compone di una serie di verità le quali successivamente si deducono l'una dall'altra e che si dicono *Assiomi*.

La Geometria ha i medesimi Assiomi. Chiamansi *Teoremi*, quelle verità che diventano evidenti per mezzo di un ragionamento chiamato *dimostrazione*.

In ogni Teorema bisogna distinguere cinque parti: l'*enunciato*, l'*applicazione*, la *costruzione*, la *dimostrazione* e la *conclusione*.

S'intende per enunciato, l'esposizione di ciò che vuolsi dimostrare, ma indipendentemente dalla figura; per applicazione, la stessa esposizione di ciò che vuolsi dimostrare, ma relativa alle diverse parti della figura; per costruzione, l'insieme di quelle operazioni che si eseguono per apparecchiare con più facilità la dimostrazione del teorema; per dimostrazione, la spiega o ragionamento evidente di tutto ciò che si è praticato nella figura e che tende a non avere qualsiasi opposizione, la quale non combattuta con dati certi potrebbe non rendere evidente l'enunciato del teorema; per conclusione, il fine della dimostrazione che dà, per conseguenza del premesso ragionamento, l'enunciato del teorema.

Nell'applicazione di un teorema debbonsi distinguere due parti, cioè la *ipotesi* e la *tesi*: la prima indica ciò che si suppone di essere vero, la seconda ciò che vuolsi dimostrare.

Nei teoremi che si sviluppano, alcuni possono essere inversi o reciproci di altri e ciò quando le tesi e le ipotesi dei primi sono ipotesi e tesi degli altri, per esempio: se si ha a dimostrare il presente teorema cioè: che in ogni triangolo ad angolo maggiore si oppone il lato maggiore; il reciproco è: in ogni triangolo un lato maggiore è opposto ad angolo maggiore.

¹ Vedi il *Corso di Aritmetica* dello stesso Autore N.° 14, pag. 11.

I *Problemi*, sono tutte quelle quistioni che si propongono per avere una soluzione.

I *Lemmi*, sono quelle verità o quistioni, impiegate per aiuto o di una dimostrazione di un Teorema o per la soluzione di un Problema.

Ai Teoremi, ai Problemi ed ai Lemmi, si assegna indifferentemente il nome comune di *Proposizione*.

Lo *Scolio*, è una osservazione fatta sopra una o più proposizioni.

Il *Corollario*, è una conseguenza immediata che deriva da una o più proposizioni.

Oltre degli Assiomi esposti nel trattato di Aritmetica ed appartenenti puranche alla Geometria si debbono per questa aggiungere altri tre indispensabili e di esclusiva sua pertinenza. Essi sono:

1.^o Due grandezze sono eguali quando soprapposte l'una sull'altra coincidono in tutta la loro estensione.

2.^o Da un punto ad un'altro non si può condurre che una sola linea retta.

3.^o Due linee rette non possono avere una parte di comune senza coincidere l'una con l'altra esattamente; quindi una linea retta non può prolungarsi dall'una e dall'altra parte che in una sola maniera.

Per rendere maggiormente brevi le dimostrazioni dei teoremi si fa uso dei medesimi segni appartenenti all'Aritmetica.

Si avverte dunque: che volendo aggiungere una quantità A ad una quantità B si fa uso del segno $+$ avendosi perciò $A + B$.

Similmente volendo togliere la quantità A dall'altra B si usa il segno $-$ e quindi si ha: $B - A$.

Può altresì una quantità essere moltiplicata per un'altra ed il segno da adoperarsi in tal caso è quello di $\times$ adunque volendo moltiplicare A per B si avrà $A \times B$.

Per avere l'operazione inversa, cioè: la quantità A divisa per l'altra B, si metterà A al disopra di B, con una linea in mezzo e si avrà: $\frac{A}{B}$

Il segno $>$ che vuol dire *maggiore* e l'altro $<$ che vuol dire *minore*, spesso si troveranno nelle differenti dimostrazioni, quindi bisogna bene tenerli a memoria, onde non vi sia confusione nel dinotare le differenti grandezze delle quantità.

Il segno $\sqrt{}$ che chiamasi radicale, quando si troverà semplicemente così seguatò, indicherà la radice quadrata, se con un 3 al disopra, cioè $\sqrt[3]{}$, indicherà la radice cubica.

Si dicono *Postulati* quelle operazioni geometriche le quali si effettuano realmente e che per la loro semplicità non si fa uso d'altro mezzo, fuorchè della riga o del compasso.

Questi Postulati si riducono a tre — 1.^o Da un punto ad un altro condurre una linea retta — 2.^o Una retta data prolungarla per quanto si voglia — 3.^o Con un punto dato preso come centro e con un dato raggio descrivere un cerchio.

AVVERTIMENTO. Si richiama l'attenzione dei studiosi in quelle proposizioni, ove richiedesi assolutamente la esatta conoscenza del trattato delle ragioni e proporzioni; senza di che, ne verrebbe una interruzione nello studio della Geometria con danno non lieve.

Avvertiamo ancora che le lettere con un solo accento come A' B' C' ecc. si pronunzieranno A prima, B prima, C prima; se con due accenti come A'' B'' C'' si pronunzieranno A seconda, B seconda, C seconda, e così di seguito se avranno tre, quattro, cinque accenti, ecc.

Come ancora se si avranno due figure simili ed in una di essa le lettere maiuscole e nell'altra le minuscole come A, B, C ed a, b, c, le prime si pronunzieranno A grande, B grande, C grande; le seconde, a piccola, b piccola, c piccola.

LIBRO PRIMO

LINEE RETTE, ANGOLI E POLIGONI

Teorema I.

Ogni linea poligonale convessa è minore di qualunque altra linea che la inviluppi e che sia terminata dai medesimi estremi.

Sia la linea poligonale convessa DEFH, dico che sarà minore di una linea qualunque DABCH che la inviluppa e che sia terminata dai medesimi estremi D ed H (*fig. 45*).

Si prolunghino i lati DE ed EF della linea poligonale DEFH fino all'incontro della linea inviluppante ne' punti I ed M.

Si avrà: $DE + EI < DA + AI$, come ancora: $EF + FM < EI + IB + BC + CM$ ed $FH < FM + MH$.

Sommando fra loro le prime parti di queste ineguaglianze e le seconde parti anche fra loro, si avrà: $DE + EI + EF + FM + FH < DA + AI + EI + IB + BC + CM + FM + MH$.

Togliendo da queste due somme disuguali le stesse grandezze EI ed FM rimarrà $DE + EF + FH < DA + AI + IB + BC + CM + MH$: ma in questa seconda somma AI + IB è lo stesso che AB, e CM + MH è lo stesso che CH, quindi $DE + EF + FH < DA + AB + BC + CH$ ovvero la linea poligonale convessa DEFH minore dell'altra che la inviluppa DABCH. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema II.

Ad un medesimo punto di una linea retta non vi può essere che una sola perpendicolare.

Al medesimo punto C della linea retta AB, dico che non vi può essere che una sola linea perpendicolare CD (*fig. 46*).

Supponiamo per ipotesi, che ve ne siano due, cioè: CD e CO. Essendo la retta CD perpendicolare ad AB, l'angolo ACD è eguale all'angolo DCB; come ancora essendo per ipotesi la retta CO perpendicolare ad AB, l'angolo ACO dovrebbe essere eguale all'angolo OCB, ma l'angolo ACO come tutto è maggiore della parte ACD, e l'angolo OCB come parte è minore del tutto DCB, quindi ACO è maggiore di OCB, per conseguenza CO non è perpendicolare ad AB. Quindi resta dimostrato, che allo stesso punto C della linea retta AB, non può esservi che una sola perpendicolare CD.

Corollario. Tutti gli angoli retti sono eguali tra loro. Poichè avendo i lati scambievolmente perpendicolari, non possono essere disuguali, perchè altrimenti, situati gli uni su gli altri, i loro lati non coinciderebbero in tutta la loro estensione e vi sarebbero per conseguenza dei lati non perpendicolari ad altri, lo che è impossibile.

Teorema III.

Se una retta incontra comunque un'altra retta, fa con questa due angoli adiacenti supplementari.

Se la retta AB incontra comunque l'altra retta CD nel punto A, dico che fa con questa due angoli adiacenti CAB e BAD supplementari (*fig. 47*).

Infatti s'innalzi dal punto A la perpendicolare AE; l'angolo CAB rimarrà diviso in due angoli CAE ed EAB,

ed aggiungendo a questi l'altro BAD , si avrà che la somma dei due angoli CAB e BAD è eguale a quella dei tre CAE , EAB , BAD : ma il primo di questi angoli è retto e gli altri due EAB e BAD formano l'altro retto EAD ; quindi anche la somma dei due angoli CAB e BAD è eguale a quella di due retti e per conseguenza essi sono supplementari. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema IV.

Se due angoli adiacenti sono supplementari i lati non comuni sono in linea retta.

Se i due angoli adiacenti CAB e BAD sono supplementari, dico che i lati non comuni CA ed AD sono in linea retta (*fig. 48*).

Poichè se AD non è in linea retta con AC , sia per ipotesi AF in linea retta con AC ; allora la retta AB incontrando la supposta retta CAF farebbe con essa i due angoli CAB e BAF supplementari; ma anche i due angoli CAB e BAD sono supplementari, quindi togliendo l'angolo di comune CAB , resterebbe l'angolo BAF eguale all'angolo BAD , cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, adunque è parimente impossibile che AF è in linea retta con AC . Resta quindi dimostrato: che se due angoli adiacenti sono supplementari i lati non comuni sono in linea retta.

Teorema V.

Se due linee rette hanno due punti di comune, debbono coincidere in tutta la loro estensione e formare una sola e medesima linea retta.

Se due rette hanno due punti di comune B e C , dico che esse coincidono in tutta la loro estensione e formano una sola e medesima linea retta AD (*fig. 49*).

Supponiamo che queste due rette non coincidono interamente e cominciano ad allontanarsi nel punto C, una prendendo la direzione di CE e l'altra di CD. S'innalzi dal punto C la perpendicolare CF; l'angolo ACF è retto e parimente è retto l'angolo FCD, perchè AD si suppone linea retta; ma essendosi supposto ACE linea retta, anche l'angolo FCE dovrebbe essere retto e quindi eguale ad FCD, cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, quindi è parimente impossibile che queste due rette si allontanano dal punto C e non seguono la direzione ACD; dunque esse coincidono e formano una sola e medesima linea retta. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema VI.

Allorquando due linee rette si tagliano, gli angoli apposti al vertice sono eguali tra loro.

Siano le due rette AB e CD che si tagliano nel punto E, dico che gli angoli opposti al vertice DEB ed AEC oppure AED e CEB sono eguali tra loro (*fig. 50*).

Infatti la somma dei due angoli adiacenti AED e DEB è uguale a quella di due angoli retti per essere AB linea retta. Similmente la somma de' due angoli adiacenti AED ed AEC è anche uguale a quella di due angoli retti per essere CD linea retta. Or se da grandezze eguali si tolgano grandezze eguali, i resti saranno pure eguali. Così dalle due somme eguali $AED + DEB$ ed $AED + AEC$ togliendo l'angolo di comune AED, rimarrà DEB eguale ad AEC.

Nello stesso modo si dimostra come l'angolo AED è eguale all'angolo CEB. Adunque resta dimostrato: che allorquando due rette si tagliano, gli angoli opposti al vertice sono eguali tra loro.

Teorema VII.

Se da un punto preso su di una retta, si conducono due rette in modo da formare gli angoli opposti al vertice eguali tra loro, l'una di queste rette è il prolungamento dell'altra.

Se da un punto E preso sulla retta AB si conducono le due rette ED ed EC in modo da formare gli angoli DEB ed AEC opposti al vertice eguali, dico che CE è il prolungamento di ED (fig. 54).

Supponiamo che EC non fosse il prolungamento di ED e questo prolungamento fosse invece EF ; allora l'angolo AEF sarebbe eguale all'angolo DEB perchè si suppone DF linea retta; ma si è detto che l'angolo AEC è eguale a DEB , quindi AEF sarebbe eguale ad AEC , cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, quindi CE è il prolungamento di ED . Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — La somma di tutti gli angoli consecutivi AEF , FEC e CEB formati al punto E dalla medesima parte della retta AB , è eguale a quella di due angoli retti, perchè essa è eguale a quella dei due angoli supplementari AEC e CEB .

Corollario 2° — La somma de' quattro angoli, formati da due rette AB e CD che si tagliano, è eguale a quella di quattro angoli retti, poichè essendo supplementari i due angoli adiacenti AEC e CEB gli altri due AED e DEB sono benanche supplementari, quindi tutti i suddetti quattro angoli presi insieme equivalgono alla somma di quattro angoli retti.

Corollario 3° — Generalmente se quante rette si vogliono AE , FE , CE , BE , DE s'incontrano in uno stesso punto E , la somma degli angoli consecutivi AEF , FEC , CEB , BED , DEA e sempre eguale a quella di quattro angoli retti, perchè tutti presi insieme sono eguali alla somma de' quattro angoli formati da due rette che si tagliano nello stesso punto E .

*

Teorema VIII.

Da un punto dato fuori di una retta non si può abbassare su questa retta che una sola perpendicolare.

Da un punto dato A fuori della retta BC , dico che non si può abbassare se non la sola perpendicolare AE (*fig. 52*).

Supponiamo invece, che se ne potessero abbassare due AE ed AD . Si prolunghi la AE di una quantità qualunque EF e si tiri la retta DF .

Essendo AEF una linea retta la somma dei due angoli adiacenti AEC e CEF è eguale a quella di due angoli retti: se per ipotesi, la somma dei due angoli adiacenti ADC e CDF fosse pure eguale a quella di due angoli retti, ADF sarebbe linea retta; quindi le due linee rette AEF ed ADF avrebbero due punti di comune A ed F senza coincidere in tutta la loro estensione, lo che è impossibile; quindi è parimente impossibile, che dallo stesso punto A fuori della retta BC si possono abbassare due perpendicolari. Resta adunque dimostrato: che da un punto dato fuori di una retta non si può abbassare su questa retta che una sola perpendicolare.

Teorema IX.

Se da un punto situato fuori di una retta, si conducono su questa retta una perpendicolare e differenti obblique: 1° La perpendicolare è più corta di ciascuna obbliqua. 2° Due obblique che distano egualmente dal piede della perpendicolare sono eguali. 3° Due obblique che distano disugualmente dal piede della perpendicolare, la maggiore è quella che più se ne allontana.

Se da un punto A situato fuori della retta BC si conducono su questa retta la perpendicolare AE e differenti obblique AH , AD , AG (*fig. 55*), dico: 1° La perpendicolare AE è più corta di ciascuna obbliqua. 2° Le due ob-

blique AD ed AG che distano egualmente dal piede E , della perpendicolare AE , sono eguali. 3° Delle due oblique AH ed AD che distano disugualmente dallo stesso piede della medesima perpendicolare, la maggiore è AH perchè è quella che più se ne allontana.

Primo. Si prolunghi AE fino al punto F in modo che AE sia eguale ad EF e si tiri DF . Essendo l'angolo AED eguale all'angolo DEF perchè retti e la distanza AE eguale ad EF per costruzione, se si faccia girare il piano AED intorno a DE è chiaro che nella parte opposta incontrerà il piano DEF e combaciando in tutta la loro estensione, il punto A cadrà sul punto F , quindi la retta AD sarà eguale alla retta DF . Come nel teorema precedente, essendo AEF una linea retta, sarà minore della linea spezzata ADF ; quindi AE metà di AEF sarà minore di AD metà di ADF .

Secondo. Essendo similmente l'angolo AEG eguale all'angolo AED perchè retti, e la distanza EG eguale alla distanza ED per costruzione, se si faccia girare il piano AEG intorno alla perpendicolare AE , è chiaro che nella parte opposta incontrerà il piano AED e combaceranno in tutta la loro estensione; quindi, combaciando il punto G sul punto D , la retta AG sarà eguale alla retta AD .

Terzo. Si tiri HF , per quello che già si è dimostrato, essendo per la stessa causa il piano AEH eguale al piano HEF , risulta AH eguale ad HF . Ma la linea poligonale ADF è minore di AHF che la involupa e che è terminata dai medesimi estremi A ed F , quindi risulta che AD , metà di ADF , è minore di AH metà di AHF .

Scolio. Le reciproche di questo teorema sono tutte evidenti, poichè se la retta AE fosse più corta di tutte quelle condotte dal punto A sopra BC dovrebbe essere perpendicolare a questa retta, in caso contrario sarebbe un'obliqua eguale alla perpendicolare che si abbasserebbe dallo stesso punto A sulla BC , lo che è impossibile. Più se le due oblique AG ed AD non fossero eguali sarebbero anche disuguali le distanze DE ed EG , lo che è parimente

impossibile; quindi anche le due obblique disuguali hanno fra loro la stessa relazione delle distanze dai loro piedi a quello della perpendicolare.

Corollario 1° — La distanza fra un punto ed una retta è misurata per mezzo della perpendicolare, perchè essa è la più corta linea che si possa condurre da questo punto alla retta.

Corollario 2° — Dallo stesso punto dato fuori di una retta non si possono condurre che due sole obblique eguali, perchè se in contrario se ne potessero condurre tre, si avrebbero allora da una stessa parte della perpendicolare, due obblique eguali, lo che è impossibile.

Teorema X.

Se da un punto medio di una retta si eleva una perpendicolare a questa retta. 1° Ogni punto preso su questa perpendicolare disterà egualmente dalle due estremità della data retta. 2° Ogni punto preso fuori della perpendicolare disterà disugualmente dalle medesime estremità.

Se dal punto C medio della retta AB s'innalza la perpendicolare CD (*fig. 54*) dico: 1° Che ogni punto F preso su questa perpendicolare, disterà egualmente dalle due estremità A e B della data retta. 2° Che ogni punto G preso fuori della perpendicolare CD disterà disugualmente dalle medesime estremità.

Primo. Si congiunga il punto F con i punti A e B, per mezzo delle obblique FA ed FB; i due piani FCA ed FCB essendo entrambi terminati da una parte dalla stessa retta FC, avendo dippiù per costruzione, AC eguale a CB, e l'angolo FCA eguale ad FCB perchè retti, se uno di questi piani e sia FCB giri intorno alla FC, verrà dall'altra parte a combaciare interamente sul suo eguale FCA, e quindi FB cadrà esattamente sulla FA e saranno eguali. Ma queste due rette misurano la distanza del punto F dalle due estremità A e B della data retta, per

conseguenza resta dimostrato, che il punto *F* preso sulla perpendicolare *CD* è egualmente distante dagli estremi della retta *AB*.

Secondo. Si congiunga il punto *G* con i punti *A* e *B* mediante le rette *GA* e *GB*; dal punto *I* ove la retta *AG* incontra la perpendicolare *DC*, si tiri *IB*. Per quello che precedentemente si è dimostrato *AI* è eguale ad *IB*. Ora la linea *GB*, perchè retta, è minore di *GI + IB* che è una linea spezzata; quindi nella somma *GI + IB* sostituendo ad *IB* la sua eguale *IA*, si avrà $GB < GI + IA$, ovvero *GB* minore di *GA*; ma queste due rette misurano la distanza del punto *G* dalle due estremità *A* e *B*, ne nasce dunque, che qualunque punto preso fuori della perpendicolare *DC*, disterà disugualmente dalle medesime estremità *A* e *B*. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se due punti qualunque distano egualmente dalle estremità di una retta data, la retta che passa per essi, anche prolungata se fia d'uopo, sarà perpendicolare nel punto medio della data retta. Infatti, se per due punti qualunque *D*, *I*, egualmente distanti dalle estremità della retta *AB*, si faccia passare la retta *DI* questa prolungata in *C* ed anche in *L* è perpendicolare alla retta *AB* nel punto medio *C*. Poichè essendo i punti *D*, *I*, ad eguale distanza degli estremi *A*, *B*, essi dovranno trovarsi forzosamente sulla perpendicolare innalzata nel punto medio *C*, ma siccome per essi non si può condurre che una sola retta, quindi sarà questa retta la medesima perpendicolare *CD*, che anche prolungata in *L* dà sempre luogo alle stesse considerazioni.

La perpendicolare *DC* è il luogo geometrico dei punti egualmente distanti dai due *A* e *B*.

Teorema XI.

Se due rette sono perpendicolari ad una stessa retta
sono parallele fra loro.

Se le due rette *AB* e *CD* sono perpendicolari ad una stessa retta *EF*, dico che sono parallele fra loro (*fig. 55*).

Infatti se le due rette AB e CD non fossero parallele, prolungate sufficientemente dovrebbero incontrarsi. S'immagini che prolungate s'incontrino nello stesso punto O si avranno in tal modo dallo stesso punto O due rette OAB ed OCD perpendicolari alla EF , lo che è impossibile, quindi le due rette AB e CD non potendosi incontrare in nessun punto del loro prolungamento, sono parallele.

Corollario. L'incontro del prolungamento di una retta con un'altra retta, oppure l'incontro dei simultanei prolungamenti di due rette che abbiano i loro piedi su di un'altra, succede, allorchando una è perpendicolare e l'altra obliqua alla stessa retta, oppure sono ambedue oblique; nell'uno e nell'altro caso, l'incontro avviene sempre dalla parte, in cui formano la somma degli angoli interni, minore di quella di due retti. E ciò perchè la convergenza delle due rette forma con la congiungente dei loro piedi un triangolo; quindi presa la congiungente come base, la somma degli angoli ai piedi delle due rette che s'incontrano, deve forzosamente (come in appresso si vedrà^{*}) essere minore di due angoli retti, in caso contrario non potrebbe avere più luogo il triangolo e per conseguenza neppure l'incontro delle due rette.

Teorema XII.

Se due rette sono parallele ad una terza,
sono parallele tra loro.

Se le due rette AB e CD sono parallele alla terza EF , dico che esse sono parallele fra loro (*fig. 56*).

Si tiri la perpendicolare GI sulla AB e si prolunghi fino all'incontro del punto H in modo che tagli le tre rette AB , CD , EF nei punti I , L , M . Essendo GH perpendicolare ad AB , sarà viceversa, AB perpendicolare a GH . Essendo CD parallela ad AB , sarà ancora CD per-

^{*} I Professori spiegheranno questo Corollario come un semplice Postulato e non trascureranno di ritornarci sopra appena spiegato il Teorema XXXV, essendovi tra il presente Corollario ed il suddetto Teorema grande relazione.

pendicolare a GH . In ultimo, sarà per la stessa ragione EF perpendicolare a GH . Ora per essere le tre rette AB , CD , EF perpendicolari alla stessa retta GH , ne risulta, che le stesse, prolungate per quanto si vogliano non potranno giammai incontrarsi, quindi sono parallele fra loro. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Se due o più rette sono parallele fra loro, ogni perpendicolare ad una di esse, sarà perpendicolare ancora alle altre. Poichè se ciò non fosse vero, qualcheduna di esse dovrebbe incontrare in qualche punto le altre, quindi non sarebbero più parallele fra loro, lo che è contro l'ipotesi.

Teorema XIII.

Da un punto dato fuori di una retta, non si può condurre che una sola parallela a questa retta.

Da un punto C , fuori della retta AB , dico che non si può condurre che una sola parallela a questa retta (*fig. 57*).

Infatti, s'immagini che se ne possano condurre due, cioè: CD e CM . Si abbassi dal punto C sulla AB la perpendicolare CO . Le due rette AB e CD essendo parallele, sono perpendicolari alla stessa retta CO ; parimente, essendo per ipotesi, CM ed AB parallele, CM è perpendicolare a CO ; quindi nel medesimo punto C della retta CO , vi sarebbero due perpendicolari CD e CM , lo che è impossibile; per conseguenza, è parimente impossibile che CM sia parallela ad AB .

Resta dunque dimostrato, che dallo stesso punto C fuori della retta AB non si può condurre che una sola parallela a questa retta.

Corollario. Se due rette non sono parallele, la retta perpendicolare ad una di essa, è obliqua all'altra; perchè in caso contrario, si avrebbero due rette non parallele con una comune perpendicolare, lo che è impossibile.

Teorema XIV.

La perpendicolare compresa fra due rette parallele e che passa pel punto medio della parte di una secante compresa fra le stesse parallele, è divisa in due parti eguali.

Sia la perpendicolare LH compresa fra due rette parallele AB e CD che passa pel punto medio O , della parte IG della secante EF compresa fra le stesse parallele, dico che OL è eguale ad OH (*fig. 58*).

Infatti se il piano LOG si faccia rivoltare dal punto O in modo che OL combaci esattamente sopra OH è chiaro che OI ed OG essendo eguali per costruzione, diverrebbero due oblique equidistanti dal piede della perpendicolare OH , quindi LG sarebbe il prolungamento di IH . Ma per essere LG il prolungamento di IH il punto L deve combaciare esattamente sul punto H , per conseguenza LO è eguale ad OH , nè può essere altrimenti, perchè allora fra i due punti O ed H , vi sarebbero due rette differenti lo che è impossibile.

Resta dunque dimostrato, che la perpendicolare compresa fra due rette parallele e che passa pel punto medio di una secante compresa fra le stesse parallele, è divisa in due parti eguali.

Teorema XV.

Se due rette parallele sono segate da una terza, formano: 1° Gli angoli alterni-interni eguali. 2° Gli angoli alterni-esterni eguali. 3° Gli angoli corrispondenti eguali. 4° La somma dei due angoli interni dalla stessa parte della secante eguale a quella di due angoli retti. 5° La somma dei due angoli esterni da una stessa parte della secante eguale parimente a quella di due angoli retti.

Siano le due rette parallele AB e CD segate da una terza EF , dico: 1° Che gli angoli alterni-interni AGI e

GID sono eguali. 2° Gli angoli alterni-esterni **EGB** e **CIF** eguali. 3° Gli angoli corrispondenti **EGB** e **GID** eguali. 4° La somma dei due angoli interni da una stessa parte della secante, **GID** e **BGI**, eguale a quella di due angoli retti. 5° La somma dei due angoli esterni dalla stessa parte della secante **EGB** e **DIF** parimente eguale a quella di due angoli retti (*fig. 58*).

Primo. Si conduca la perpendicolare **LH** in modo che passi pel punto **O**, medio della secante **IG**, si avrà che **OI** è eguale ad **OG** per costruzione, **LO** eguale ad **OH** per quello che si è dimostrato nel teorema precedente e l'angolo **LOG** eguale all'angolo **IOH**, perchè opposti al vertice; quindi il piano **OGL** è eguale al piano **OHI**; dall'eguaglianza di questi due piani, ne nasce che l'angolo **LGO** è eguale all'angolo **OIH**, ovvero gli angoli alterni-interni **AGI** e **GID** eguali fra loro.

Secondo. Essendo l'angolo **AGI** eguale all'angolo **GID** i loro angoli opposti al vertice, sono puranche eguali fra loro, quindi gli angoli alterni-esterni **EGB** e **CIF** sono eguali.

Terzo. Dall'eguaglianza degli angoli **EGB** e **CIF**, ne risulta che gli angoli corrispondenti **GID** ed **EGB** sono eguali, perchè il primo di questi angoli è opposto al vertice dell'angolo **CIF**.

Quarto. Per essere la somma degli angoli adiacenti **EGB** e **BGI** eguale a quella di due angoli retti, sostituendo ad **EGB** il suo eguale **GID** si avrà che la somma de' due angoli interni dalla stessa parte **GID** e **BGI** è eguale a quella di due angoli retti.

Quinto. Per essere parimente la somma de' due angoli adiacenti **GID** e **DIF** eguale a quella di due angoli retti, sostituendo a **GID** il suo eguale **EGB**, si avrà che la somma de' due angoli esterni **EGB** e **DIF** è eguale a quella di due angoli retti.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XVI.

Reciprocamente : Se due rette fanno con una segante. 1° Gli angoli alterni-interni eguali. 2° Gli angoli alterni-esterni eguali. 3° Gli angoli corrispondenti eguali. 4° La somma degli angoli interni da una stessa parte della segante eguale a quella di due retti. 5° La somma degli angoli esterni da una stessa parte della segante puranche eguale a quella di due retti. Esse sone parallele.

Se due rette AB e CD fanno con una segante EF . — 1° Gli angoli alterni-interni AGI e GID eguali. 2° Gli angoli alterni-esterni EGB e CIF eguali. 3° Gli angoli corrispondenti EGB e GID eguali. 4° La somma degli angoli interni BGI e GID da una stessa parte della segante eguale a quella di due retti. 5° La somma degli angoli esterni EGB e DIF puranche eguale a quella di due retti ; dico che esse sono parallele (*fig. 59*).

Primo. Infatti, se gli angoli alterni-interni AGI e GID sono eguali ed AB non fosse parallela a CD , sia per ipotesi, LM parallela a CD . Gli angoli LGI e GID dovrebbero essere eguali, ma nel teorema precedente si è dimostrato che AGI è eguale a GID , quindi sarebbe l'angolo AGI eguale all'angolo LGI cioè il tutto eguale alla parte, lo che è impossibile, per conseguenza AB è parallela a CD .

Secondo. Se gli angoli alterni-esterni EGB e CIF sono eguali, ed AB non fosse parallela a CD , dovrebbe per ipotesi essere LG il prolungamento di GB , quindi l'angolo LGI sarebbe eguale ad AGI opposto al vertice dell'angolo EGB , lo che è impossibile, per conseguenza AB è parallela a CD .

Terzo. Se gli angoli corrispondenti EGB e GID sono eguali, ed AB non fosse parallela a CD , dovrebbe per ipotesi essere ancora l'angolo EGM eguale all'angolo GID , quindi EGM eguale ad EGB , ciò che è assurdo, dunque AB è parallela a CD .

Quarto. Se la somma de' due angoli interni dalla stessa parte della secante BGI e GID è eguale a quella di due angoli retti, ed AB non fosse parallela a CD , la somma de' due angoli interni MGI e GID dovrebbe essere eguale a quella di due angoli retti. Or se dalle due grandezze eguali $BGI + GID$ ed $MGI + GID$ si togliesse l'angolo di comune GID resterebbe BGI eguale ad MGI , lo che è impossibile, quindi AB è parallela a CD .

Quinto. Se la somma dei due angoli esterni dalla stessa parte della secante EGB ed FID è eguale a quella di due angoli retti ed AB non fosse parallela a CD , la somma dei due angoli esterni EGM ed FID dovrebbe essere eguale a quella di due angoli retti, or se dalle due grandezze eguali $EGB + FID$ ed $EGM + FID$ si togliesse l'angolo di comune FID resterebbe EGB eguale ad EGM , lo che è impossibile, dunque AB è parallela a CD .

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se due rette sono tagliate da una terza, posta una qualunque delle cinque sopradette condizioni, ne risultano le altre quattro. Poichè se per ipotesi due rette facessero dalla medesima parte della secante la somma dei due angoli interni, o dei due angoli esterni maggiore o minore di quella di due retti, oppure gli angoli corrispondenti disuguali, esse s'incontrerebbero. In caso contrario, risulterebbe come sopra si è dimostrato la somma dei due angoli interni dalla medesima parte della secante o quella degli angoli esterni, eguale a quella di due angoli retti, e per conseguenza gli angoli corrispondenti eguali; dunque basta una di queste condizioni per far risultare le altre due. Ma dall'eguaglianza degli angoli corrispondenti, nascono le eguaglianze degli angoli alterni-interni e degli angoli esterni, quindi una delle cinque condizioni fa assolutamente risultare tutte le altre quattro.

Teorema XVII.

Due rette parallele sono da per tutto egualmente distanti.

Se due rette AB e CD sono parallele, dico che sono da per tutto egualmente distanti (*fig. 60*).

Dai due punti F ed H presi ad arbitrio sulla retta CD , si alzino le due perpendicolari FE ed HG , è chiaro che esse sono perpendicolari ancora alla retta AB e parallele fra di loro e dippiù misurano la vera distanza fra le due parallele AB e CD . Si conduca la diagonale EH , il piano $EFHG$ rimarrà diviso in due parti eguali cioè in HEF ed in EHG ; poichè l'angolo GEH è eguale all'angolo EHF come alterni-interni a causa delle due parallele EG ed FH segate dalla terza EH ; l'angolo GHE è eguale all'angolo HEF parimente come alterni-interni a causa delle due parallele GH ed EF segate dalla terza EH ; dippiù l'angolo EGH eguale all'angolo EFH perchè retti ed il lato EH di comune ai due piani HEF ed EHG , questi due piani, se si sovrappongono l'uno sull'altro in modo da coincidere in tutta la loro estensione, risulta GH eguale ad EF . Dunque, le rette che misurano le distanze delle parallele essendo eguali, ne viene per conseguenza, che le due rette parallele sono da per tutto egualmente distanti.

Teorema XVIII.

Due angoli che hanno i loro lati rispettivamente paralleli sono eguali o supplementari.

Siano: 1° I due angoli ABC e DEF che hanno i lati AB e DE , BC ed EF , rispettivamente paralleli e diretti nel medesimo verso, dico che essi sono eguali. — 2° I due angoli BLM e DEF , che hanno i lati BL ed EF , DE ed LM rispettivamente paralleli e diretti in senso contrario, dico che essi sono eguali. — 3° I due angoli DEF ed ELB , che hanno i lati, EL ed ED , EF e BL rispettivamente paralleli e due di essi diretti nello stesso verso e due in verso contrario, dico che essi sono supplementari (*fig. 64*).

Primo. Essendo gli angoli DEF e DLC eguali come corrispondenti, a causa delle parallele EF e BC segate

dalla terza DM ; e dippiù eguali gli angoli DLC ed ABC perchè puranche corrispondenti a causa delle parallele DL ed AB segate dalla terza BC , ne viene per conseguenza che anche ABC è eguale a DEF .

Secondo. I due angoli BLM e DLC essendo eguali perchè opposti al vertice a causa delle due rette DM e BC che si tagliano nel punto L , e siccome si è dimostrato che DLC è eguale a DEF , ne risulta quindi che anche BLM è eguale a DEF .

Terzo. I due angoli ELB ed ELC sono supplementari a causa del lato di comune EL , che incontra la retta BC ; ma l'angolo ELC è eguale all'angolo DEF , quindi anche l'angolo ELB è il supplemento dell'angolo DEF .

Resta dunque dimostrato, che se due angoli hanno i lati rispettivamente paralleli, essi sono o eguali o supplementari.

Teorema XIX.

Se due angoli hanno i loro lati perpendicolari ciascuno a ciascuno, essi sono o eguali o supplementari.

Siano: 1° I due angoli ABC e DEF che hanno i lati rispettivamente perpendicolari, cioè: DE ad AB ed FE a BC , dico che essi sono eguali.—2° I due angoli FEH ed ABC , formato il primo da EF e dal prolungamento di DE , dico che essi sono supplementari (*fig. 62*).

Primo. Si tiri LB parallela a DE e perpendicolare ad AB , ed OB parallela ad FE e perpendicolare a BC . Essendo LB e DE rispettivamente perpendicolari ad AB , esse sono parallele; parimente, essendo OB ed FE perpendicolari alla stessa retta BC , esse sono benanche parallele; adunque i due angoli LBO e DEF , avendo i loro lati rispettivamente paralleli, e diretti nello stesso verso, sono eguali. Or essendo i due angoli LBA ed OBC eguali perchè retti, togliendo a ciascun di essi la parte di comune LBC , rimarrà LBO eguale ad ABC , ma LBO è eguale a DEF , dunque DEF è eguale ad ABC .

Similmente, l'angolo GEH formato dai prolungamenti di DE ed FE , è eguale all'angolo ABC , perchè è puranche eguale a DEF che è il suo opposto al vertice.

Secondo. L'angolo FEH è il supplemento dell'angolo DEF perchè la loro somma è eguale a quella di due angoli retti per essere DH linea retta; ma si è dimostrato che DEF è eguale ad ABC , quindi anche l'angolo FEH è il supplemento dell'angolo ABC .

Resta dunque dimostrato: che se due angoli hanno i loro lati rispettivamente perpendicolari ciascuno a ciascuno essi sono o eguali o supplementari.

Teorema XX.

Ogni punto preso sulla bisettrice di un angolo è egualmente distante dai lati dello stesso angolo. Ogni punto preso fuori della stessa bisettrice è disugualmente distante dai lati del medesimo angolo.

Ogni punto F preso sulla bisettrice AG dell'angolo BAC dico che è egualmente distante dai lati AB ed AC . Ogni punto H situato fuori della stessa bisettrice AG , dico che è disugualmente distante dai lati AB ed AC del medesimo angolo BAC (*fig. 63*).

Primo. Dal punto F preso sulla bisettrice, si tirino le due rette: FE perpendicolare ad AC ed FD perpendicolare ad AB . Il piano ADF è eguale al piano AEF , perchè l'angolo ADF è eguale ad AEF essendo entrambi retti, l'angolo DAF eguale ad FAE per costruzione e tutti due piani terminati dallo stesso lato AF , quindi se il primo di essi giri intorno a questo lato in modo da incontrare l'altro, combaceranno in tutta la loro estensione e la retta DF combacerà esattamente con la retta FE e per conseguenza saranno eguali; ma DF ed FE misurano la distanza del punto F ai lati dell'angolo BAC , dunque il punto F è egualmente distante dai lati AB ed AC .

Secondo. Dal punto H situato fuori della bisettrice si tiri HE perpendicolare ad AC ed HI perpendicolare ad AB; parimente dal punto F ove la retta HE incontra la bisettrice si tiri FD perpendicolare sopra AB e si congiunga DH. Essendo DH minore di HF + FD si avrà che DH è minore di HF + FE perchè si è già dimostrato che FD è eguale ad FE, ma IH come perpendicolare è minore di HD obliqua abbassata dallo stesso punto H sulla retta BD, quindi con più forte ragione IH è minore di HF + FE. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Il luogo geometrico dei punti egualmente distanti da due rette che si tagliano è il sistema delle bisettrici degli angoli formati dalle stesse rette.

Teorema XXI.

In ogni triangolo un lato qualunque è minore della somma ed è maggiore della differenza degli altri due:

Sia il triangolo ABC, dico che un lato qualunque AB è minore della somma ed è maggiore della differenza degli altri due BC ed AC (*fig. 64*).

Primo. Essendo, per definizione, la linea retta minore della linea spezzata, così un lato qualunque AB perchè linea retta, è il più corto cammino fra i punti A e B, per conseguenza è minore della somma degli altri due AC e CB, che formano una linea spezzata.

Secondo. Ammettendo che AB sia il più grande lato del triangolo e volendo dimostrare come sia maggiore della differenza degli altri due, si prenderà questo lato e si aggiungerà all'altro AC, avendosi perciò $AB + AC > BC$, si tolga da ambo le parti di questa ineguaglianza la stessa quantità AC, si otterrà $AB > BC - AC$.

Parimente siccome si è dimostrato che AB è minore di $AC + CB$ ovvero $AC + CB > AB$ togliendo dall'una e dall'altra parte di questa ineguaglianza la stessa quan-

tità AC resterà $CB > AB - AC$; come ancora se dall'una e dall'altra parte di questa stessa ineguaglianza si toglia CB si avrà $AC > AB - CB$.

Adunque resta in tal modo dimostrato come ciascun dei lati di un triangolo è minore della somma ed è maggiore della differenza degli altri due.

Teorema XXII.

Se da un punto preso nell'interno di un triangolo si tirano alla estremità di un lato due rette, la somma di queste rette sarà minore di quella degli altri due lati del medesimo triangolo.

Se dal punto O preso nell'interno del triangolo ABC si tirano all'estremità del lato BC due rette OB ed OC , dico che la somma di queste due rette è minore di quella degli altri due lati BA ed AC (*fig. 65*).

Infatti prolungando BO fino all'incontro del lato AC nel punto D . Si avrà $BO + OD < BA + AD$. Parimente $OC < OD + DC$. Aggiungendo fra loro le prime parti di queste due ineguaglianze, e le seconde anche fra loro, si avrà l'ineguaglianza $BO + OD + OC < BA + AD + OD + DC$ togliendo da ambo le parti la medesima grandezza OD , resterà $BO + OC < BA + AD + DC$ ovvero $BO + OC < BA + AC$. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXIII.

La somma delle distanze da un punto preso nell'interno di un triangolo ai tre vertici del medesimo, è minore del perimetro ed è maggiore del semiperimetro dello stesso triangolo.

La somma delle distanze OA , OB , OC , da un punto O , preso nello interno del triangolo ABC ai tre vertici del medesimo, dico che è minore del perimetro ed è maggiore del semiperimetro dello stesso triangolo (*fig. 66*).

Primo. Per quello che si è dimostrato nel Teorema precedente si ha: $AO + OB < AC + CB$, $OB + OC < BA + AC$, $AO + OC < CB + BA$. Aggiungendo fra loro le prime parti di queste tre ineguaglianze e le seconde anche fra loro, si avrà $2 AO + 2 OB + 2 OC < 2 AC + 2 CB + 2 BA$ e dividendo tutto per 2 si avrà $AO + OB + OC < AC + CB + BA$. Cioè, la somma delle distanze dal punto O ai tre vertici minore del perimetro del triangolo.

Secondo. Le rette OA, OB, OC dividono il triangolo ABC in tre triangoli AOB, BOC e COA, nel primo si avrà $AB < AO + OB$, nel secondo $BC < BO + OC$, nel terzo $CA < CO + OA$. Aggiungendo fra loro le prime parti di queste ineguaglianze e le seconde anche fra loro si otterrà l'altra ineguaglianza $AB + BC + CA < 2 AO + 2 BO + 2 CO$ e dividendo tutto per 2 si otterrà

$$\frac{AB + BC + CA}{2} < \frac{2 AO + 2 BO + 2 CO}{2} \text{ ovvero } AO + BO + CO >$$

Teorema XXIV.

Due triangoli sono eguali allorchè essi hanno un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali.

Siano i due triangoli ABC e DEF che hanno l'angolo A eguale all'angolo D, il lato AB eguale a DE ed il lato AC eguale a DF, dico che questi due triangoli sono eguali (*fig. 67*).

Infatti sovrapponendoli l'uno sull'altro in modo che coincidono in tutta la loro estensione: è chiaro che il lato AB cadendo sul lato DE il punto A cade in D ed il punto B in E. Dall'essere l'angolo A eguale all'angolo D il lato AC coinciderà sul suo eguale DF in modo che il punto C cadrà sul punto F, quindi il terzo lato BC combacerà esattamente sul terzo lato EF perchè altrimenti fra E ed F, vi sarebbero due rette distinte lo che è impossibile, quindi il triangolo ABC è eguale al triangolo DEF.

Corollario 1° — Per essere tre parti di un triangolo eguali a tre parti di un'altro triangolo, cioè un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali, le altre tre parti debbono essere benanche eguali, cioè gli altri due angoli B e C eguali rispettivamente ad E ed F e il lato BC eguale ad EF .

Corollario 2° — Un triangolo è determinato quando si hanno due lati e l'angolo compreso.

Teorema XXV.

Due triangoli sono eguali allorchè essi hanno un lato eguale adiacente rispettivamente a due angoli eguali.

Siano i due triangoli ABC e DEF che hanno l'angolo B eguale all'angolo E , l'angolo C eguale all'angolo F ed il lato BC eguale ad EF , dico che questi due triangoli sono eguali (*fig. 67*).

Infatti sovrapponendo questi due triangoli l'uno sull'altro in modo che coincidono in tutta la loro estensione, è chiaro che il lato BC cadendo sul lato EF il punto B cade in E ed il punto C in F . Dall'essere l'angolo B eguale all'angolo E il lato BA prenderà la direzione di ED ed il punto A si troverà su di un punto della retta ED , parimente dall'essere l'angolo C eguale all'angolo F il lato CA prenderà la direzione di FD ed il punto A si troverà su di un punto della retta FD , or dovendo il punto A trovarsi tanto sul lato ED che sul lato FD dovrà necessariamente cadere sul punto d'intersezione D , dunque i due triangoli ABC e DEF combaciano in tutta la loro estensione e perciò sono eguali.

Corollario 1° — Per essere tre parti di un triangolo eguali a tre parti di un altro triangolo, cioè un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali, le altre parti debbono essere benanche eguali, cioè il lato AB eguale a DE , il lato AC eguale a DF l'angolo A eguale all'angolo D .

Corollario 2° — Un triangolo è determinato quando si hanno due angoli ed un lato adiacente.

Teorema XXVI.

Due triangoli sono eguali quando hanno un lato di comune e gli altri due lati rispettivamente eguali, ovvero quando hanno tutti i tre lati rispettivamente eguali.

Primo. Siano i due triangoli ABC ed ABF che hanno il lato di comune AB , il lato AF eguale ad AC , il lato FB eguale a BC , dico che essi sono eguali (*fig. 68*).

Infatti ciascuno de' punti A e B dista egualmente da C e da F quindi, AB è perpendicolare nel punto medio della retta CF , ed OF è eguale ad OC , dunque l'angolo FAB è eguale all'angolo BAC ; ma il lato AF è eguale al lato AC ed AB è di comune ai due triangoli ABC ed ABF per conseguenza questi due triangoli hanno un angolo eguale ad un'angolo ciascuno compreso fra lati rispettivamente eguali, e sono eguali. Resta dunque dimostrato che due triangoli che hanno un lato di comune e due lati rispettivamente eguali sono eguali.

Secondo. Siano i due triangoli DEG ed OMN che hanno il lato DE eguale ad OM , DG eguale ad ON ed il terzo lato EG eguale al terzo lato MN , dico che essi sono eguali (*fig. 69*).

Infatti se si prenda il triangolo OMN e si porti in modo che combaciando il lato OM sul lato DE resti per ipotesi nella medesima direzione del suo eguale DEN , allora per quello che già si è dimostrato risulterà il triangolo DEN eguale al triangolo DEG quindi anche OMN sarà eguale a DEG . Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — Gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali, nei triangoli eguali.

Corollario 2° — Un triangolo è determinato quando son dati tutti tre i lati.

Teorema XXVII.

Se due lati di un triangolo sono eguali a due lati di un altro triangolo, ciascuno a ciascuno, e se nello stesso tempo l'angolo compreso fra i primi è maggiore dell'angolo compreso fra i secondi, sarà il terzo lato del primo triangolo, maggiore del terzo lato del secondo triangolo.

Se i due lati AB ed AC del triangolo ABC , sono eguali ai due lati DE e DF del triangolo DEF , e se nel tempo stesso l'angolo BAC compreso fra i primi è maggiore dell'angolo EDF compreso fra i secondi, dico che il terzo lato BC del primo è maggiore di EF terzo lato del secondo (*fig. 70*).

Si faccia l'angolo GAC eguale ad EDF , si prenda AG eguale a DE e si tiri GC . I triangoli GAC e DEF sono eguali, perchè hanno un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali; quindi il terzo lato GC è eguale al terzo lato EF .

Possono darsi tre casi: 1° Quando il punto G cade fuori del triangolo ABC . 2° Quando cade sul lato BC . 3° Quando cade dentro del triangolo ABC .

Primo caso. Nel triangolo GOC si ha il lato $GC < GO + OC$ e nel triangolo ABO si ha il lato $AB < AO + OB$ aggiungendo fra loro le prime parti di queste ineguaglianze e le seconde anche fra loro, si avrà $GC + AB < GO + AO + OC + OB$ ovvero $GC + AB < GA + BC$ togliendo dall'una e dall'altra parte di questa ineguaglianza le due grandezze eguali AB ed AG , rimarrà $GC < BC$, ma GC è eguale ad EF , dunque EF è minore di BC .

Secondo caso. Osservando i due triangoli AGC ed ABC (*fig. 71*) si vedrà che il lato GC è minore di BC perchè tutta la retta BC è maggiore della sua parte GC , ma GC è eguale ad EF , dunque EF è minore di BC .

Terzo caso. Cadendo il punto G nell'interno del triangolo ABC (*fig. 72*) si avrà $AG + GC < AB + BC$ togliendo dall'una e dall'altra parte di questa ineguaglianza le due grandezze eguali AG ed AB , rimarrà $GC < BC$ ma GC è eguale ad EF , dunque EF è minore di BC . Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXVIII.

Reciprocamente se due lati di un triangolo sono eguali a due lati di un'altro triangolo, ciascuno a ciascuno, e se nel tempo stesso, il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo, l'angolo compreso fra i due primi lati è maggiore dell'angolo compreso fra i due secondi.

Se i due triangoli ABC e DEF hanno il lato AB eguale a DE , il lato AC eguale a DF , il lato BC maggiore del lato EF , dico che l'angolo BAC è maggiore dell'angolo EDF (*fig. 73*).

Poichè, se l'angolo BAC non è maggiore dell'angolo EDF deve essere o eguale o minore; nel primo caso, i due triangoli ABC e DEF avrebbero un angolo eguale ad un angolo, compresi fra lati eguali ciascuno a ciascuno, quindi sarebbero eguali, ed il terzo lato BC sarebbe eguale al terzo lato EF , lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, i due triangoli ABC e DEF avrebbero un angolo minore di un angolo, compresi fra lati eguali ciascuno a ciascuno, quindi sarebbe il terzo lato BC minore del terzo lato EF lo che è pure contro l'ipotesi. Adunque non potendo l'angolo BAC essere nè eguale nè minore dell'angolo EDF dovrà essere forzosamente maggiore. Resta quindi dimostrato: che se due lati di un triangolo sono rispettivamente eguali a due lati di un altro triangolo ed il terzo lato del primo è maggiore del terzo lato del secondo triangolo, l'angolo compreso fra i due primi lati è maggiore dell'angolo compreso fra i due secondi.

Teorema XXIX.

In ogni triangolo isoscele, gli angoli opposti ai lati eguali sono eguali.

Sia ABC un triangolo isoscele, dico che gli angoli ABC ed ACB opposti ai lati eguali AB ed AC sono eguali (*fig. 74*).

Si tiri dal vertice A al punto medio D della base BC la retta AD ; il triangolo ABC , rimarrà diviso in due triangoli eguali ADB ed ADC poichè essi avranno il lato AD di comune, BD eguale a DC per costruzione ed il terzo lato AB eguale al terzo AC , quindi dall'eguaglianza di questi triangoli ne risulta che l'angolo ABD è eguale all'angolo ACD , ovvero l'eguaglianza degli angoli opposti ai lati eguali del triangolo isoscele. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Essendo eguali i due triangoli ADB ed ADC , ne nasce che l'angolo BAD è eguale all'angolo DAC e l'angolo ADB eguale all'angolo ADC : or per essere questi due ultimi angoli eguali, la retta AD è perpendicolare alla base BC , dunque la retta condotta dal vertice di un triangolo isoscele al punto medio della base è perpendicolare alla base medesima ed è la bisettrice dell'angolo al vertice.

Si prende per base di un triangolo, non isoscele, un lato qualunque e per vertice quello dell'angolo opposto. Nel triangolo isoscele, si prende per base il lato minore e per vertice quello dell'angolo opposto.

Teorema XXX.

Reciprocamente se due angoli di un triangolo sono eguali i lati opposti sono eguali ed il triangolo è isoscele.

Se due angoli B e C del triangolo ABC sono eguali, dico che i lati opposti AB ed AC sono eguali ed il triangolo è isoscele (*fig. 75*).

Poichè se i lati AB ed AC non fossero eguali, uno di essi dovrebbe essere maggiore dell'altro, e sia per ipotesi AB maggiore di AC ; si prenda sul lato AB una porzione BD che s'immagini eguale ad AC e si tiri la retta DC , i due triangoli DCB ed ACB avrebbero un'angolo eguale ad un angolo compresi fra lati rispettivamente eguali, cioè l'angolo DBC eguale ad ACB , il lato BC di comune ed il lato DB per costruzione eguale ad AC , quindi essi sarebbero eguali e per conseguenza sarebbe l'angolo DCB eguale all'angolo ACB , cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, dunque è parimente impossibile che i lati AB ed AC sieno disuguali, essi sono eguali, ed il triangolo ABC è isoscele.

Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Un triangolo equiangolo è nel tempo stesso equilatero, perchè gli angoli eguali sono opposti ai lati eguali.

Teorema XXXI.

Di due lati di un triangolo il maggiore è quello che si oppone all'angolo maggiore. Reciprocamente di due angoli di un triangolo il maggiore è quello che è opposto al lato maggiore.

Di due lati AB ed AC del triangolo ABC dico che il maggiore è AC perchè si oppone all'angolo maggiore ABC . Reciprocamente de' due angoli B e C dello stesso triangolo, dico che il maggiore è B perchè è opposto al lato maggiore AC (fig. 76).

Primo. Dall'angolo maggiore ABC si prenda una parte DBC eguale all'angolo minore ACB ; il triangolo DCB avrà per costruzione l'angolo DBC eguale all'angolo DCB quindi il lato BD eguale al lato DC . Ma la linea retta AB è minore della spezzata $AD + DB$ e sostituendo a DB la sua eguale DC si avrà $AB < AD + DC$ ovvero $AB < AC$; adunque il lato AC che si oppone all'angolo maggiore ABC è maggiore del lato AB che si oppone all'angolo minore ACB .

Secondo. Supponendo che l'angolo ABC opposto al lato maggiore AC non sia maggiore dell'angolo ACB opposto al lato minore AB , allora dovrebbe essere o eguale o minore: nel primo caso sarebbe il lato AC eguale ad AB , lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, sarebbe lo stesso lato AC minore di AB , lo che è anche contro l'ipotesi, dunque non potendo essere l'angolo B nè eguale nè minore dell'angolo C deve forzosamente esserne maggiore.

Resta perciò dimostrato: che di due lati di un triangolo, il maggiore è quello che si oppone all'angolo maggiore. Reciprocamente di due angoli di un triangolo, il maggiore è quello che è opposto al lato maggiore.

Teorema XXXII.

Due triangoli rettangoli che hanno le ipotenuse ed un cateto rispettivamente eguali, sono eguali.

Siano i due triangoli rettangoli ABC e DEF che hanno l'ipotenusa AC eguale all'ipotenusa DF , il cateto AB eguale al cateto DE , dico che essi sono eguali (*fig. 77*).

L'eguaglianza di questi triangoli sarebbe manifesta se l'altro cateto CB fosse eguale all'altro cateto FE , perchè allora questi due triangoli avendo i tre lati rispettivamente eguali sarebbero eguali. Or se il triangolo DEF si porti sul triangolo ACB in modo che il cateto DE combaci sul suo eguale AB ed il resto del piano DFE prenda la direzione di ABF , allora, per quello che già innanzi si è dimostrato, essendo l'angolo ABC eguale all'angolo ABF perchè retti, e l'ipotenusa AC eguale all'ipotenusa AF , queste due rette, rispetto alla perpendicolare AB , sono due oblique equidistanti dal suo piede, quindi la distanza CB è eguale alla distanza BF , ed il triangolo ABC è eguale al triangolo ABF , ovvero ABC eguale a DEF . Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXXIII.

Due triangoli rettangoli sono eguali allorchè essi hanno l'ipotenusa ed un angolo differente dal retto eguale.

Siano i due triangoli rettangoli ABC e DEF che ànno l'ipotenusa AC eguale all'ipotenusa DF e l'angolo CAB eguale all'angolo FDE dico che essi sono eguali (*fig. 77*).

Sovrapponendo il triangolo DEF sul triangolo ABC è chiaro che l'angolo retto E combacerà esattamente con l'angolo retto B , quindi il lato ED prenderà la direzione di BA . Ora essendo l'angolo BAC eguale all'angolo EDF e l'ipotenusa AC eguale all'ipotenusa DF , il punto D cadrà sul punto A ed il punto F sul punto C , quindi il terzo lato EF combacerà esattamente sul terzo lato BC , perchè in caso contrario dal punto C vi sarebbero due perpendicolari FE e CB sullo stesso lato AB , lo che è impossibile, dunque i due triangoli ABC e DEF combaceranno in tutta la loro estensione e saranno eguali. Resta perciò dimostrato: che due triangoli rettangoli sono eguali, quando hanno l'ipotenusa eguale ed un'angolo differente dal retto eguale.

Teorema XXXIV.

Se in un triangolo qualunque si prolunga uno dei lati, l'angolo esterno che ne nasce è eguale alla somma dei due angoli interni non adiacenti all'esterno.

Sia il triangolo ABD , se si prolunga uno dei lati e sia BD , dico che l'angolo esterno che ne nasce ADC è eguale alla somma dei due angoli interni BAD ed ABD non adiacenti allo esterno (*fig. 78*).

Tirisi la retta DE parallela al lato AB , l'angolo BAD è eguale all'angolo ADE per causa delle due parallele intersegate dalla terza AD . Parimente, l'angolo ABD è

eguale all'angolo EDC come corrispondenti per causa delle stesse due parallele intersegate dalla terza BC. Quindi i due angoli ADE ed EDC sono eguali ai due BAD ed ABD, ovvero l'intero angolo ADC eguale a $BAD + ABD$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se in un triangolo si prolunga un lato qualunque l'angolo esterno che ne nasce è maggiore di ciascuno degli angoli interni non adiacenti all'esterno. Poichè se dalla eguaglianza: $ADC = BAD + ABD$ si togliesse soltanto dalla somma $BAD + ABD$ una volta il primo angolo ed un'altra il secondo resterebbe in primo luogo $ADC > ABD$ ed in secondo luogo $ADC > BAD$.

Corollario. Se il triangolo ABD fosse stato isoscele in modo da essere il lato AD eguale al lato DB, allora l'angolo esterno ADC sarebbe stato doppio di ciascuno dei due angoli eguali BAD ed ABD.

Teorema XXXV.

La somma dei tre angoli di un triangolo è eguale a quella di due angoli retti.

La somma dei tre angoli ABD, BAD ed ADB del triangolo ABD, dico che è eguale a quella di due angoli retti (*fig. 78*).

Prolungando come nel teorema precedente il lato BD di una quantità qualunque DC, l'angolo esterno ADC sarà eguale alla somma dei due interni ABD e BAD, aggiungendo tanto al primo angolo che a questi due, l'angolo ADB, si avrà $ADB + ADC = ABD + BAD + ADB$, ma la prima somma de' due angoli adiacenti ADB ed ADC è eguale a quella di due angoli retti, quindi anche la somma dei tre angoli del triangolo ABD è eguale a quella di due angoli retti. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — In ogni triangolo non può esservi che un solo angolo retto e con più forte ragione non può esservi che un solo angolo ottuso.

Corollario 2° — In ogni triangolo rettangolo la somma dei due angoli acuti è eguale ad un angolo retto, se il triangolo rettangolo è puranche isoscele ciascuno degli angoli acuti è la metà di un angolo retto.

Corollario 3° — Quando si conoscono due angoli di un triangolo o soltanto la loro somma si ottiene il terzo angolo sottraendo i due angoli cognitivi o la loro somma da quella di due retti, la resta è ciò che si chiede. Dunque la somma di due angoli di ciascun triangolo è sempre minore di quella di due angoli retti.

Corollario 4° — Se due angoli di un triangolo sono eguali a due angoli di un'altro triangolo, ciascuno a ciascuno, sarà il terzo angolo del primo parimente eguale al terzo angolo del secondo, perchè ciascuno di essi è differenza di grandezze eguali sottratte dalla stessa grandezza che è la somma di due angoli retti: quindi i due triangoli sono equiangoli.

Corollario 5° — In ogni triangolo equilatero, essendo ciascuno degli angoli la terza parte della somma di due angoli retti, così ognuno di essi è puranche due terzi di un angolo retto.

Teorema XXXVI.

Gli angoli formati al disotto della base dai prolungamenti dei lati eguali di un triangolo isoscele sono eguali.

Gli angoli BCE e CBD formati al disotto della base BC dai prolungamenti CE e BD dei lati eguali AC ed AB, dico che essi sono eguali (*fig. 79*).

Infatti la somma dei due angoli adiacenti ACB e BCE è eguale a quella di due angoli retti; parimente la somma de' due angoli adiacenti ABC e CBD è eguale a quella di due angoli retti. Or essendo l'angolo ACB eguale all'angolo ABC e se dalla prima delle due notate grandezze eguali si toglie l'angolo ACB e dalla seconda l'angolo ABC, rimarrà l'angolo BCE eguale all'angolo CBD.

Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Ciascuno angolo formato al disotto della base da' prolungamenti dei lati eguali di un triangolo isoscele, è eguale alla somma del suo adiacente con quello del vertice. Infatti essendo l'angolo ECB eguale a CBA + BAC e CBA eguale a BCA, sarà quindi ECB eguale a BCA + CAB cioè al suo adiacente più quello del vertice.

Teorema XXXVII.

Sopra di una stessa retta presa come base non possono esservi da una medesima parte due triangoli eguali distinti che abbiano i lati eguali ciascuno a ciascuno.

Sopra di una stessa retta BC presa come base, dico che non possono esservi da una medesima parte due triangoli ABC e DBC eguali distinti e che abbiano i lati eguali ciascuno a ciascuno, cioè DB eguale ad AB e DC eguale ad AC (*fig. 80*).

Infatti suppongasì che i due triangoli ABC e DBC abbiano il lato DB eguale ad AB il lato DC eguale ad AC; ora questi due triangoli essendo eguali perchè hanno tutti i tre lati rispettivamente eguali, il punto D dovrebbe forzosamente stare sul punto A ed essi combacerebbero in tutta la loro estensione; ma supponendo che il punto D non stia sul punto A, allora si congiunga il punto A col punto D mediante la retta AD. Possono darsi due casi: o la congiungente cade fuori di ciascuno de' due triangoli o cade nell'interno di uno di essi.

Nel primo caso supponiamo che cada al difuori. Siccome nel triangolo BAD il lato BD è per ipotesi eguale a BA, l'angolo BAD è eguale all'angolo BDA; essendo l'angolo BAD maggiore di CAD sarà parimente l'angolo BDA maggiore di CAD e quindi con più forte ragione l'angolo CDA è maggiore di CAD. Or nel triangolo CDA essendo il lato CD per ipotesi eguale a CA l'angolo CDA è eguale a CAD ma si è invece dimostrato che è maggiore, dunque il lato CD non è eguale al lato CA e i due triangoli ABC e DBC non sono eguali.

Nel secondo caso (*fig. 81*): supponiamo che la congiungente AD cada dentro del triangolo ABC. Si prolunghi il lato AB di una quantità qualunque AE ed il lato BD anche di una quantità qualunque DF. Siccome nel triangolo BAD il lato BD è per ipotesi eguale a BA, gli angoli EAD e ADF al disotto della base sarebbero eguali. Or siccome DC è per ipotesi eguale ad AC, l'angolo ADC è eguale all'angolo CAD, ma l'angolo ADC è maggiore dell'angolo ADF che è eguale ad EAD, con più forte ragione l'angolo ADC è maggiore dell'angolo CAD e non già eguale, quindi AC non è eguale a DC e per conseguenza i due triangoli ABC e DBC non sono eguali.

Resta dunque dimostrato chesopra di una stessa retta presa come base non possono esservi da una medesima parte due triangoli eguali distinti che abbiano i lati eguali ciascuno a ciascuno.

Teorema XXXVIII.

La somma degli angoli interni di un poligono convesso è eguale a tante volte due angoli retti quanto è il numero dei suoi lati meno due.

La somma degli angoli interni ABC, BCD, CDE, DEA ed EAB del poligono convesso ABCDE dico che è eguale a quella di sei angoli retti, cioè a tante volte due angoli retti per quanti lati ha il poligono meno due (*fig. 82*).

Si tirino dall'angolo A agli altri angoli C e D le diagonali AC ed AD il pentagono ABCDE rimarrà in tal modo diviso in tre triangoli ABC, ACD, ADE che avranno lo stesso vertice A e per base i lati del poligono meno i due AB ed AE. Or essendo la somma degli angoli interni di un triangolo eguale a quella di due angoli retti, ed essendo il poligono diviso in tre triangoli sarà per conseguenza la somma dei suoi angoli interni eguali a sei angoli retti. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXXIX.

Se si prolungano nella stessa direzione tutti i lati di un poligono convesso, la somma degli angoli esterni, che così nascono, è sempre eguale a quella di quattro angoli retti.

Se si prolungano nella stessa direzione tutti i lati del poligono convesso $ABCDE$, la somma degli angoli esterni ABI , BCH , CDG , DEF , EAM è eguale a quella di quattro angoli retti (*fig. 85*).

Infatti ciascuno degli angoli esterni è supplemento del suo adiacente interno; quindi la somma degli angoli tanto interni, quanto esterni, è eguale a tante volte due angoli retti, quanti sono i lati del poligono. Ora la somma degli angoli tanto interni quanto esterni del poligono $ABCDE$ che ha i suoi lati prolungati nella stessa direzione, è eguale a 10 angoli retti. Ma gli angoli interni equivalgono a 6 angoli retti, dunque da 10 detraendo 6, rimarranno 4 angoli retti per la somma degli angoli esterni. Resta perciò dimostrato: che se si prolungano nella stessa direzione tutti i lati di un poligono convesso, la somma degli angoli esterni così formati, è sempre eguale a quella di quattro angoli retti.

Teorema XL.

Due poligoni della medesima specie sono eguali, allorquando tutti i lati e gli angoli sono eguali e disposti nello stesso ordine, eccetto due lati consecutivi e l'angolo che essi comprendono.

Siano i due esagoni $ABCDEF$ e $GHILMN$ che àno il lato AB eguale a GH , BC eguale ad HI , CD eguale ad IL , DE eguale ad LM ; dippiù l'angolo $A = G$, $B = H$, $C = I$, $D = L$, $E = M$, e disposti nello stesso ordine, dico che questi due poligoni sono eguali (*fig. 84*).

Infatti con la sovrapposizione del poligono $ABCDEF$ sul poligono $GHILMN$, ne nasce che essendo l'angolo A eguale all'angolo G ed il lato AB eguale al lato GH il lato AF cadrà sul lato GN . Parimente essendosi sovrapposto il lato AB sul lato GH e l'angolo B essendo eguale ad H , il lato BC combacerà sul suo eguale HI ed il punto C cadrà sul punto I . Applicando la medesima costruzione per i rimanenti lati ed angoli e dall'essere l'angolo E eguale ad M e l'angolo A eguale a G ne risulta che il lato EF prenderà forzosamente la direzione di MN , quindi il punto F si troverà sul punto N ed i due esagoni coincideranno in tutta la loro estensione, per conseguenza saranno eguali.

Scolio. Due poligoni della medesima specie sono eguali, quando ad eccezione di un lato e dei due angoli adiacenti, sono le altre parti eguali e disposte nel medesimo ordine. Ciò risulta similmente mediante la sovrapposizione di essi.

Corollario 1° — Un poligono $ABCDEF$ è determinato, quando si conoscono tutti i lati e tutti gli angoli, eccetto i due lati consecutivi EF ed FA e l'angolo EFA che essi comprendono. Infatti, dividendo il poligono $ABCDEF$ in quattro triangoli per mezzo delle diagonali AC , AD , AE , i triangoli consecutivi ABC , ACD , ADE si troveranno determinati; ora il triangolo AEF resterebbe a determinarsi, ma conoscendosi un lato e due angoli ad esso adiacenti può determinarsi un triangolo, quindi conoscendosi il lato AE ed i due angoli A ed E ad esso adiacenti resta anche il triangolo AEF determinato, per conseguenza resta determinato l'intero poligono $ABCDEF$.

Corollario 2° — Un poligono $ABCDEF$ è determinato, quando si conoscono tutti i lati e tutti gli angoli, eccetto il lato AF e gli angoli ad esso adiacenti BAF ed EFA . Infatti, come nel corollario precedente, i triangoli consecutivi ABC , ACD , ADE si trovano determinati eccetto l'altro AEF . Ora conoscendosi i lati AE ed EF e l'angolo E , che essi comprendono, resta determinato il triangolo AEF , per conseguenza resta determinato l'intero poligono $ABCDEF$.

Corollario 3° — Un poligono $ABCDEF$ è determinato, quando si conoscono tutti i lati e gli angoli consecutivi, eccetto i tre E , F ed A . Infatti il triangolo ABC è determinato dall'angolo B e dai lati AB e BC , per conseguenza si conoscerà l'angolo BCA ed il terzo lato AC , il triangolo ACD viene determinato dall'angolo ACD e dai lati AC e CD ; procedendo in tal modo saranno determinati tutti i triangoli eccettuato l'ultimo AEF , il quale sarà puranche determinato, perchè si conoscono i tre lati AE , EF ed FA , senza che sia necessario conoscere i tre angoli del poligono DEF , EFA ed FAB .

Corollario 4° — Un poligono $ABCDEF$ è determinato, quando si conoscono tutti i lati e tutte le diagonali che partono da uno stesso vertice. Infatti i triangoli nei quali resta diviso il poligono per mezzo delle diagonali, sono tutti determinati, perchè di ognuno si conoscono i tre lati; quindi riunendo insieme questi triangoli si verrà a determinare l'intero poligono $ABCDEF$.

Corollario 5° — Un poligono $ABCDEF$ è determinato, quando si conosce un solo de'suoi lati e tutti gli angoli che questo lato fa con le diagonali che partono dalle sue estremità. Infatti conosciuto il lato AB , i vertici C , D , E , F , si trovano in relazione col detto lato per mezzo delle diagonali AC , AD , AE , BD , BE , BF condotte dalle sue estremità, quindi essendo i vertici degli angoli del poligono determinati, sarà ancora determinato l'intero poligono $ABCDEF$.

Teorema XLI.

In ogni parallelogrammo i lati opposti, come ancora gli angoli opposti sono tra loro eguali.

Sia il parallelogrammo $ABCD$, dico che il lato AB è eguale a DC , AD eguale a BC , l'angolo B eguale all'angolo D , e l'angolo A eguale all'angolo C (*fig. 85*).

Si tiri la diagonale AC , il parallelogrammo $ABCD$ rimarrà diviso in due triangoli ABC ed ACD i quali avranno il lato AC di comune, l'angolo BAC eguale all'angolo ACD come alterni-interni a causa delle parallele AB e

DC, e l'angolo DAC eguale ad ACB parimente come alterni-interni a causa delle due parallele AD e BC. Dunque questi due triangoli saranno eguali e per conseguenza il lato AB è eguale al lato DC, il lato BC è eguale al lato AD e l'angolo B è eguale all'angolo D.

Ma essendo l'angolo DAB formato dai due angoli DAC e CAB i quali sono rispettivamente eguali ai due angoli ACB ed ACD, che formano l'angolo DCB, sarà quindi l'angolo A eguale all'angolo C. Rimane perciò dimostrato: che in ogni parallelogrammo i lati opposti, non che gli angoli opposti sono eguali.

Corollario. Due rette parallele comprese fra due rette parallele sono sempre eguali, risultando ciò dall'eguaglianza dei triangoli che nascono per mezzo della diagonale, come già si è dimostrato.

Teorema XLII.

Se in un quadrilatero i lati opposti sono eguali, saranno ancora paralleli e la figura sarà un parallelogrammo.

Sia il quadrilatero ABCD, che ha il lato AB eguale al lato DC, il lato AD eguale al lato BC, dico che questi lati eguali sono fra loro paralleli e la figura è un parallelogrammo (*fig. 85*).

Si tiri la diagonale AC, i due triangoli ADC ed ACB avendo il lato AC di comune, il lato AB eguale a DC ed il lato AD eguale a BC essi saranno eguali. Ma nei triangoli eguali, gli angoli eguali si oppongono ai lati eguali, quindi l'angolo ACB opposto al lato AB è eguale all'angolo CAD opposto al lato DC, ma questi due angoli sono alterni-interni rispetto ai due lati AB e DC, quindi AB e DC sono paralleli, Parimente, essendo per l'istessa causa l'angolo DCA eguale all'angolo CAB e questi due angoli sono alterni-interni, rispetto ai due lati AD e BC dunque AD e BC sono puranche paralleli. Ora il qua-

drilatero $ABCD$ avendo ancora i lati opposti eguali, e gli angoli opposti puranche eguali, è un parallelogrammo. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XLIII.

Se due lati opposti di un quadrilatero sono eguali e paralleli, gli altri due lati saranno similmente eguali e paralleli, e la figura sarà un parallelogrammo.

Se i due lati AB e DC del quadrilatero $ABCD$ sono eguali e paralleli, gli altri due lati BC ed AD saranno similmente eguali e paralleli e la figura sarà un parallelogrammo (*fig. 85*).

Tirata la diagonale AC , dall'essere l'angolo BAC eguale all'angolo ACD come alterni-interni rispetto alle due parallele AB e DC , ed essendo le stesse parallele eguali, i due triangoli ABC e CAD avendo un angolo eguale ad un angolo, compresi fra lati rispettivamente eguali, saranno eguali, e per conseguenza il terzo lato BC è eguale al terzo lato AD ; ma l'angolo DAC risultando eguale all'angolo ACB , avviene che BC è parallela ad AD .

Ora il quadrilatero $ABCD$ avendo i lati opposti eguali e paralleli, è un parallelogrammo. Resta perciò dimostrato che se due lati opposti di un quadrilatero sono eguali e paralleli gli altri due sono puranche eguali e paralleli e la figura è un parallelogrammo.

Teorema XLIV.

La somma delle due diagonali di un quadrilatero qualunque è minore del perimetro ed è maggiore del semiperimetro del quadrilatero medesimo.

Siano le due diagonali AC e DB del quadrilatero $ABCD$, dico che la somma di queste due diagonali è minore del perimetro ed è maggior del semiperimetro del quadrilatero medesimo (*fig. 86*).

Primo. È chiaro, che se si considera solamente esistere nel quadrilatero ABCD la diagonale DB, si avrà: $DB < AD + AB$, e $DB < DC + CB$. Parimente, considerando che esista solamente nello stesso quadrilatero la diagonale AC, si avrà similmente $AC < AD + DC$ ed $AC < AB + CB$. Aggiungendo fra loro le prime parti di queste quattro ineguaglianze e le seconde parti anche fra loro, si avrà l'ineguaglianza $2DB + 2AC < 2AD + 2DC + 2CB + 2AB$, e dividendo per 2 risulterà $DB + AC < AD + DC + CB + AB$, cioè la somma delle diagonali minore del perimetro del quadrilatero ABCD.

Secondo. Per quello che precedentemente si è dimostrato si avranno le seguenti ineguaglianze, cioè: $DC < DO + OC$, $DA < DO + OA$, $AB < OA + OB$, $BC < OB + OC$. Aggiungendo le prime parti di queste ineguaglianze fra loro e le seconde anche fra loro, risulterà l'ineguaglianza $DC + DA + AB + BC < 2DO + 2OB + 2OC + 2OA$ e prendendo la metà dall'una e dall'altra parte si avrà:

$$\frac{DC + DA + AB + BC}{2} < DO + OB + OC + OA$$

cioè la somma delle due diagonali maggiore del semi-perimetro del quadrilatero ABCD. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XLV.

Le due diagonali di un parallelogrammo si tagliano scambievolmente in due parti eguali.

Sia il parallelogrammo ABCD, dico che le due diagonali AC e BD si tagliano scambievolmente in due parti eguali (*fig. 86*).

Infatti i due triangoli AOB e DOC sono eguali perchè hanno un lato eguale adiacente a due angoli rispettivamente eguali, cioè il lato AB eguale al lato DC, l'angolo ABO eguale a ODC come alterni-interni e l'angolo BAO eguale ad OCD, per la stessa causa; quindi il lato AO opposto all'angolo B, eguale al lato OC opposto

all'angolo D , ed il lato OB opposto all'angolo A eguale ad OD opposto all'angolo C . Dunque le due diagonali AC e DB si tagliano scambievolmente in due parti eguali:

Corollario. Gli angoli BAD ed ABC di un rettangolo essendo eguali perchè retti, i due triangoli BAD ed ABC sono eguali e le due diagonali AC e DB sono benanche eguali.

Teorema XLVI.

Le due diagonali di un quadrato e di un rombo si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

Siano le due diagonali AB e CD del quadrato $ACBD$ e le due diagonali EF e GH del rombo $EGFH$, dico che esse si tagliano scambievolmente ad angoli retti (*fig. 87*).

Primo. Nel quadrato $ACBD$ essendo i lati AC ed AD eguali, i due triangoli AOD ed AOC sono eguali perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali, cioè: AO di comune, AC eguale ad AD e CO eguale ad OD , quindi l'angolo AOC eguale all'angolo AOD ; ma il triangolo ACD è isoscele dunque AO è perpendicolare a CD . Nella stessa maniera si dimostra che DO è perpendicolare ad AB , quindi le due diagonali AB e CD si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

Secondo. Nel rombo $EGFH$, essendo i lati EG e GF eguali, i due triangoli EOG e GOF , hanno i tre lati rispettivamente eguali e per conseguenza sono eguali; dall'essere FGF un triangolo isoscele, GO è perpendicolare ad EF . Dunque per quello che già si è dimostrato, le due diagonali EF e GH del rombo, si tagliano scambievolmente ad angoli retti.

Corollario. Due parallelogrammi sono eguali, quando hanno un angolo eguale compreso fra due lati rispettivamente eguali — Due rettangoli sono eguali, quando hanno due lati adiacenti rispettivamente eguali — Due quadrati sono eguali, quando hanno un solo lato eguale — Due losanghe sono eguali, quando hanno un lato ed un angolo rispettivamente eguali.

Teorema XLVII.

La retta che unisce i punti medi dei lati non paralleli di un trapezio è parallela agli altri due lati ed è eguale alla metà della loro somma.

Sia il trapezio $ABDC$ dico che la retta MN che unisce i punti medi dei lati AC e BD non paralleli, è parallela agli altri due lati AB e CD ed è eguale alla metà delle loro somma (*fig. 88*).

Infatti dal punto medio N del lato BD si tiri PO parallela ad AC e si prolunghi AB fino ad incontrare la retta PO : i due triangoli BNO e PND sono eguali perchè hanno l'angolo BNO eguale a PND perchè opposti al vertice, l'angolo OBN eguale all'angolo NDP come alterni-interni a causa delle parallele AO e CD , ed il lato BN eguale ad ND per costruzione, quindi BO è eguale a PD . Ma AC è eguale ad OP , perchè parallele comprese fra due parallele, dunque AM metà di AC è eguale ad ON metà di OP e per conseguenza MN è parallela ad AB , quindi è anche parallela a CD . Ora essendo MN eguale ad $AB + BO$ ed eguale a $CD - PD$ sommando queste eguaglianze si avrà: $2 MN = AB + CD$ e dividendo per 2 si avrà $MN = \frac{AB + CD}{2}$. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XLVIII.

In un trapezio la retta che unisce i punti medi delle diagonali è parallela ai due lati paralleli ed è uguale alla metà della loro differenza.

Sia il trapezio $ABCD$, dico che la retta MN che unisce i punti medi delle diagonali AC e DB è parallela ai due lati paralleli AB e DC ed è eguale alla metà della loro differenza (*fig. 89*).

Dal punto medio N della diagonale AC si conduca la retta EF parallela a DB e si prolunghi AB fino ad incontrare la retta EF ; i due triangoli FNC ed ANE sono eguali avendo come nel teorema precedente un lato eguale ad un lato, adiacenti ad angoli rispettivamente eguali; quindi FC è eguale ad AE . Ma BD è eguale ad EF perchè parallele comprese fra parallele, dunque DM metà di DB è eguale ad NF metà di FE , per conseguenza MN è parallela a DF , quindi è puranche parallela ad AB . Or essendo MN eguale a $DC - FC$ ed eguale ad $AE - AB$, sommando queste eguaglianze si avrà: $2 MN = DC - AB$ e dividendo per 2, si avrà $MN = \frac{DC - AB}{2}$. Ciò che volevasi dimostrare.

LIBRO SECONDO

CERCHIO, RETTE IN ESSO CONSIDERATE, MISURA DEGLI ANGOLI

Teorema I.

Ogni diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti eguali — Ogni altra retta iscritta in un cerchio e che non passa pel centro, divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti disuguali.

1.° Sia il diametro AB , dico che divide il cerchio ADB e la sua circonferenza in due parti eguali — 2.° Sia la retta CD iscritta nel medesimo cerchio e che non passa pel centro O , dico che essa divide questo cerchio e la sua circonferenza in due parti disuguali (*fig. 90*).

Primo. Supponendo che la parte AEB del cerchio giri intorno al diametro AB in modo che combaci sull'altra parte AFB , è chiaro che la semicirconferenza AEB combacerà interamente sulla semicirconferenza AFB ed il punto E cadrà su di un punto della linea curva AFB , perchè in caso contrario vi sarebbero due punti F ed E disugualmente lontani dal centro, lo che è impossibile, quindi la semicirconferenza AEB combacerà esattamente sulla semicirconferenza AFB e le due parti del cerchio da esse terminate, saranno eguali. Dunque il diametro divide il cerchio e la sua circonferenza in due parti eguali.

Secondo. Facendo girare la parte del cerchio CED intorno alla corda CD , è chiaro che la parte della circonferenza CED non toccherà l'altra AFB e per conseguenza

anche le superficie intercettate da queste curve sono disuguali. Ma immaginando che la parte del cerchio CED è eguale all'altra AFB allora avendo il diametro AB diviso il cerchio in due parti eguali cioè in AFB ed AEB, sarebbe in tal caso la parte CED eguale al tutto AEB, lo che è impossibile; quindi la retta CD che non passa pel centro divide il cerchio e la circonferenza in due parti disuguali.

Solio. Ciascuna corda di un cerchio è minore del diametro. Infatti tirando i raggi OC ed OD, si avrà che CD è minore della somma di CO ed OD. Ma questa somma è eguale al diametro AB dunque CD è minore di AB.

Corollario. La più grande retta che possa iscriversi in un cerchio è il diametro.

Teorema II.

Nel medesimo cerchio o in cerchi eguali a corde eguali corrispondono angoli al centro eguali e reciprocamente ad angoli al centro eguali corrispondono corde eguali.

Siano i due cerchi eguali ABCD ed EFGH dico che alle corde eguali DC ed HG corrispondono angoli al centro DOC ed HMG eguali, e reciprocamente ai medesimi angoli al centro eguali corrispondono le dette corde eguali DC ed HG (*fig. 94*).

Infatti essendo per costruzione i due cerchi ABCD ed EFGH eguali e la corda DC eguale alla corda HG i due triangoli ODC ed MHG avendo i tre lati rispettivamente eguali sono eguali, quindi l'angolo DOC è eguale all'angolo HMG, ma questi due angoli sono al centro dei due cerchi eguali, quindi a corde eguali corrispondono angoli al centro eguali.

Reciprocamente. Se gli angoli al centro DOC ed HMG sono eguali, corrispondono le corde eguali DC ed HG. Infatti i due triangoli ODC ed MHG sono eguali perchè

hanno un angolo eguale ad un angolo ciascuno compreso fra lati rispettivamente eguali, quindi il terzo lato DC è eguale al terzo lato HG ; dunque resta ancora dimostrato: che nello stesso cerchio o in cerchi eguali ad angoli al centro eguali corrispondono corde eguali.

Teorema III.

Nel medesimo cerchio o in cerchi eguali a corde maggiori corrispondono angoli al centro maggiori e reciprocamente ad angoli al centro maggiori corrispondono corde maggiori.

Siano i due cerchi eguali $ABCD$ ed $EFGH$, dico che delle due corde DI ed HG alla maggiore DI corrisponde l'angolo maggiore al centro DOI . Reciprocamente al medesimo angolo corrisponde la corda maggiore DI (*fig. 94*).

Infatti i due triangoli ODI ed MHG hanno due lati eguali a due lati perchè raggi di cerchi eguali, ed il terzo lato DI maggiore del terzo lato HG , quindi l'angolo DOI opposto al lato DI è maggiore dell'angolo HMG opposto al lato HG .

Reciprocamente all'angolo maggiore DOI corrisponde la corda maggiore DI . Si tiri dal punto D la corda DC eguale ad HG e si tiri il raggio OC , il triangolo DOC è eguale al triangolo HMG perchè hanno tutti i tre lati rispettivamente eguali. Ma i due triangoli ODI ed ODC hanno due lati eguali a due lati e l'angolo DOI compreso fra i lati DO ed OI , maggiore dell'angolo DOC compreso fra i lati DO ed OC , quindi il terzo lato DI è maggiore di DC ; or DC è eguale ad HG , dunque DI è maggiore di HG .

Resta perciò dimostrato: che nel medesimo cerchio o in cerchi eguali a corde maggiori corrispondono angoli al centro maggiori, e reciprocamente ad angoli al centro maggiori corrispondono corde maggiori.

Teorema IV.

Nel medesimo cerchio o in cerchi eguali, gli archi eguali sono sottesi da corde eguali e reciprocamente corde eguali sottendono archi eguali.

Siano i due cerchi eguali $ABGC$ e $DEFH$, dico che gli archi AMB e DNE sottesi dalle corde eguali AB e DE sono eguali e reciprocamente le medesime corde sottendono i medesimi archi (*fig. 92*).

Infatti essendo il diametro AG eguale al diametro DF , il semicerchio ABG potrà applicarsi sul semicerchio DEF in modo da coincidere in tutta la loro estensione, quindi il punto A cadrà sul punto D , il punto G sul punto F ed il punto B sul punto E ; dall'essere l'arco AMB eguale all'arco DNE la corda AB combacerà esattamente sulla corda DE , perchè altrimenti fra i due punti D ed E vi sarebbero due rette distinte, lo che è impossibile, dunque gli archi eguali sono sottesi da corde eguali.

Reciprocamente le corde eguali AB e DE sottendono gli archi eguali AMB e DNE . Si tirino i raggi OB ed RE , i due triangoli AOB e DRE avendo i tre lati rispettivamente eguali sono eguali e per conseguenza l'angolo AOB è eguale all'angolo DRE . Ora sovrapponendo, come sopra si è fatto, il semicerchio ABG sul semicerchio DEF e combaciato il punto A col punto D ed il punto B col punto E , l'arco AMB dovrà combaciare esattamente sull'arco DNE ; poichè se non combacia esattamente vi sarebbero dei punti delle circonferenze disugualmente lontani dal centro, lo che è impossibile. Adunque: nello stesso cerchio o in cerchi eguali corde eguali sottendono archi eguali.

Teorema V.

Nel medesimo cerchio o in cerchi eguali, archi maggiori sono sottesi da corde maggiori e reciprocamente corde maggiori sottendono archi maggiori, purchè gli archi di cui si tratta sieno minori della semicirconferenza.

Siano i due cerchi eguali ABC e DEF dico che de' due archi AMB e DNE il maggiore AMB è sotteso dalla corda maggiore AB . Reciprocamente la medesima corda sottende lo stesso arco (*fig. 93*).

Prendasi sull'arco AMB una parte AMG eguale a DNE , si tiri la corda AG ed i raggi OA , OG ed OB , l'angolo AOB essendo maggiore dell'angolo AOG corrisponde al primo la corda AB ed al secondo la corda AG , quindi AB è maggiore di AG ; ma l'arco AMB è maggiore dell'arco AMG , ed AMG è eguale a DNE , quindi rimane dimostrato che arco maggiore è sotteso da corda maggiore.

Reciprocamente essendo la corda AB maggiore della corda AG l'arco AMB è maggiore dell'arco AMG , poichè se il primo arco non fosse maggiore del secondo dovrebbe essere o eguale o minore; nel primo caso sarebbe la corda AB eguale alla corda AG lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso sarebbe la corda AB minore della corda AG , lo che è pure impossibile; quindi nello stesso cerchio o in cerchi eguali corde maggiori sottendono archi maggiori purchè gli archi di cui si tratti, come i due AMB ed AMG , sieno minori della semicirconferenza.

Scolio. Se i due archi AMB ed AMG fossero maggiori della semicirconferenza, avrebbe luogo la proprietà contraria, cioè che corde minori sottendono archi maggiori, e reciprocamente archi maggiori sono sottesi da corde minori, essendo chiaro, che aumentando gradatamente l'arco dippiù della semicirconferenza la corda diminuisce nelle stesse proporzioni.

Teorema VI.

Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, due angoli al centro eguali intercettano sulla circonferenza archi eguali. Reciprocamente, due archi eguali hanno gli angoli al centro eguali.

Siano le due circonferenze ABCD ed ECHI eguali, dico che gli angoli al centro eguali AOD ed ELI, intercettano archi eguali AD ed EI. Reciprocamente se i medesimi archi sono eguali anche gli angoli al centro AOD ed ELI saranno eguali (fig. 94).

Primo. Se l'angolo AOD è eguale all'angolo ELI, tirate le corde AD ed EI i due triangoli OAD ed LEI sono eguali e quindi situati l'uno sull'altro coincidono in tutta la loro estensione. Or se questi triangoli coincidono interamente, allora il punto A cadrà in E ed il punto D in I e l'arco AD coinciderà esattamente con l'arco EI, perchè in caso contrario, vi sarebbero dei punti disugualmente lontani dal centro lo che è impossibile. Resta perciò dimostrato che l'arco AD è eguale all'arco EI.

Secondo. Se l'arco AD è eguale all'arco EI l'angolo AOD è eguale all'angolo ELI. Se per ipotesi questi archi avessero due angoli disuguali al centro, allora uno dovrebbe essere maggiore e sia AOD; si prenda su di esso una parte MOD che si suppone eguale ad ELI e tirata la corda MD si ha che il triangolo OMD è eguale al triangolo LEI, quindi l'angolo MOD è eguale all'angolo ELI; ma per essere la corda AD eguale alla corda EI, l'angolo AOD è eguale all'angolo ELI, quindi l'angolo MOD sarebbe eguale ad AOD cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, dunque gli archi eguali AD ed EI hanno angoli eguali al centro e per conseguenza ELI è eguale ad AOD. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema VII.

Il raggio perpendicolare ad una corda, divide questa corda e l'arco sotteso in due parti eguali.

Sia il raggio OC perpendicolare alla corda AB , dico che divide questa corda e l'arco sotteso ACB in due parti eguali AC e CB (*fig. 95*).

Si tirino i raggi OA ed OB all'estremità della corda AB , questi raggi sono eguali e dippiù essendo essi due obblique in rapporto alla perpendicolare OD , si allontanano egualmente dal piede D della perpendicolare, dunque AD è uguale a DB , per conseguenza la corda AB rimane divisa in due parti eguali.

Per essere AD eguale a DB la retta OC è una perpendicolare elevata dal punto medio della corda AB e quindi ogni punto preso su questa perpendicolare è egualmente distante dagli estremi A e B . Ora essendo il punto C situato sulla perpendicolare OC è equidistante dalle dette estremità; tirate le corde AC e CB queste saranno eguali, ma nello stesso cerchio corde eguali sottendono archi eguali, quindi l'arco AC è eguale all'arco CB , dunque l'arco ACB resta diviso in due parti eguali.

Scolio. Qualunque retta che passa pel punto medio di un'arco, passa ancora pel punto medio della corda che sottende questo arco e passa ancora pel centro. Infatti questa retta è la perpendicolare abbassata dal centro sulla corda, quindi passando per questi due punti passerà ancora per il terzo che appunto è il medio dell'arco sotteso dalla medesima corda.

Corollario 1° — Il luogo geometrico dei punti medi di due corde parallele è il diametro perpendicolare alle stesse corde.

Corollario 2° — Due corde che non passano pel centro del cerchio, non possono scambievolmente segarsi per metà.

Teorema VIII.

Due corde eguali sono egualmente distanti dal centro e di due corde disuguali la più piccola è quella che più dista dal centro.

1.° Siano le due corde eguali AB e CD dico che sono egualmente distanti dal centro O .

2.° Siano le due corde disuguali AB e CE dico che sono disugualmente lontane dal centro O , e la più piccola CE è quella che più se ne allontana (*fig. 96*).

Primo. Si tirino i raggi OA ed OC e dallo stesso centro O si abbassino le perpendicolari OM ed ON sopra le corde eguali AB e CD . I due triangoli rettangoli OMA ed ONC hanno l'ipotenusa OA eguale all'ipotenusa OC , il cateto AM metà di AB eguale al cateto CN metà di CD , quindi essi sono eguali e per conseguenza il terzo lato OM è eguale al terzo lato ON . Resta dunque dimostrato che le corde eguali AB e CD sono egualmente distanti dal centro.

Secondo. Essendo l'arco CED maggiore dell'arco CGE sarà la corda CD maggiore di CE . Si tiri sulla corda minore CE dal punto O la perpendicolare OS . Nel triangolo rettangolo ONR , l'ipotenusa OR è maggiore del cateto ON quindi con più forte ragione ON sarà minore di OS , ma ON è eguale ad OM per conseguenza OS è maggiore di OM . Dunque resta dimostrato che due corde disuguali sono disugualmente lontane dal centro e la minore è quella che sta più lontana.

Teorema IX.

Per tre punti dati non in linea retta non può passare solamente che una sola circonferenza.

Per i tre punti A, B, C , dati non in linea retta dico che non può passare che una sola circonferenza (*fig. 97*).

Si tirino le rette AB e CB e dai loro punti medi D ed F si elevino le perpendicolari DG ed FH ; è chiaro che queste due perpendicolari dovranno incontrarsi nel punto O , perchè in caso contrario sarebbero parallele e quindi le due rette AB e BC che sono ad esse perpendicolari e tirate dallo stesso punto B dovrebbero coincidere, ed i tre punti A , B , C sarebbero in linea retta, lo che è contro l'ipotesi. Dunque essendo O il punto d'incontro delle due perpendicolari OD ed OF tirate dai punti medi delle rette AB e BC , questo punto è equidistante dai punti A , B , C , quindi le tre distanze OA , OB ed OC sono eguali, e per conseguenza, la circonferenza descritta dal punto O come centro e col raggio eguale a ciascuna di queste distanze, passerà per i tre punti A , B , C . Nè potrà passarvene altra differente perchè O è il solo punto equidistante dai tre dati.

Corollario 1° — Le perpendicolari elevate dai punti medi dei lati di un triangolo si tagliano in uno stesso punto. Infatti, potendosi per i tre vertici di un triangolo far passare una circonferenza, i lati del triangolo diverranno corde d'altrettanti archi, quindi le perpendicolari elevate ai punti medi delle corde sono le stesse rette abbassate dal centro ai punti medi degli archi e che per conseguenza passano per i detti punti medi delle corde.

Corollario 2° — Due circonferenze che hanno tre punti di comune coincidono in tutta la loro estensione, perchè in caso contrario, si potrebbero far passare per tre punti dati non in linea retta due circonferenze differenti, lo che è impossibile.

Teorema X.

La perpendicolare condotta all'estremità di un raggio è tangente alla circonferenza. Reciprocamente il raggio condotto al punto di contatto di una tangente è perpendicolare a questa tangente.

La perpendicolare AB , condotta all'estremità del raggio OB , dico che è tangente alla circonferenza. Reci-

procamente il raggio OB condotto al punto di contatto della tangente AB , dico che è perpendicolare a questa tangente (*fig. 98*).

Primo. Si tiri la retta OA ; essendo OB perpendicolare a BA , la retta OA è un'obliqua, quindi è maggiore di OB e per conseguenza il punto A si trova fuori della circonferenza, ora lo stesso è per qualunque altra retta tirata dal punto O sulla AB , dunque la retta AB non avendo che il solo punto B di comune colla circonferenza è una tangente.

Secondo. Essendosi dimostrato che tutte le rette tirate dal punto O sulla retta AB hanno i punti fuori della circonferenza, ne nasce che esse saranno maggiori della retta OB , quindi essendo questa retta la più corta che possa tirarsi dal punto O sulla retta AB è perpendicolare a questa retta. Resta perciò dimostrato, che la perpendicolare condotta all'estremità di un raggio è tangente alla circonferenza, e reciprocamente il raggio condotto al punto di contatto di una tangente è ad essa perpendicolare.

Teorema XI.

Se da un punto preso fuori di una circonferenza si conducono ad essa due tangenti, queste tangenti sono eguali fra loro.

Se dal punto A preso fuori della circonferenza BDC , si conducono due tangenti AB ed AC , dico che queste tangenti sono eguali fra loro (*fig. 99*).

Si tirino i raggi OB ed OC i quali saranno rispettivamente perpendicolari alle due tangenti AB ed AC , parimente si tiri la retta OA ; i due triangoli rettangoli AOB ed AOC avranno l'ipotenusa AO di comune, il cateto BO eguale ad OC perchè raggi dello stesso cerchio, quindi essi saranno eguali; dall'eguaglianza di questi due triangoli ne nasce, che il terzo lato AB è eguale al terzo lato AC . Dunque resta dimostrato che da un punto

preso fuori di una circonferenza si possono condurre due tangenti, le quali sono eguali fra di loro.

Scolio. In ogni quadrilatero circoscritto al cerchio le somme dei lati opposti sono eguali fra di loro. Infatti sia il quadrilatero EGIH circoscritto al cerchio (*fig. 100*), si avrà $EG + HI = GI + EH$. Per essere le tangenti condotte dallo stesso punto al cerchio eguali fra di loro si avrà $EO = EP$, $OG = GM$, $IN = MI$, $NH + PH$ aggiungendo fra loro, le prime parti di queste eguaglianze e le seconde anche fra loro si avrà $EO + OG + IN + NH = EP + GM + MI + PH$ ovvero $EG + IH = EH + GI$. Dunque un quadrilatero perchè possa essere circoscrittibile ad un cerchio, bisogna che abbia eguali fra loro le somme de' lati opposti.

Teorema XII.

Due rette parallele intercettano sulla circonferenza archi eguali.

Siano le due rette parallele AB e CD, dico che intercettano sulla circonferenza archi eguali. Possono darsi tre casi: — 1.° Quando le due parallele sono secanti — 2.° Quando una è secante e l'altra tangente — 3.° Quando tutte e due sono tangenti.

Primo. Si tiri il diametro EF, in modo che sia perpendicolare ad AB e per conseguenza ancora perpendicolare a CD (*fig. 101*). Essendo l'arco GE eguale ad EH sarà ancora l'arco IGE eguale ad LHE quindi togliendo dal primo di questi due ultimi archi la parte GE e dal secondo la parte EH, rimarrà l'arco IG eguale all'arco LH.

Secondo. Tirato il diametro EF al punto di contatto della tangente AB (*fig. 102*) esso sarà perpendicolare a questa tangente e per conseguenza sarà ancora perpendicolare alla CD; quindi la corda IL rimarrà divisa in due parti eguali ed il punto E sarà medio dell'arco IEL, dunque l'arco EI è eguale all'arco EL.

Terzo. Essendo le due rette AB e CD parallele e tangenti allo stesso cerchio (*fig. 103*), il diametro EF sarà

perpendicolare ad entrambe; ma il diametro divide il cerchio e la circonferenza in due parti eguali, dunque la mezza circonferenza EIF è eguale alla mezza circonferenza EGF . Resta perciò dimostrato che due rette parallele intercettano sulla circonferenza due archi eguali.

Corollario. Se due parallele sono tangenti allo stesso cerchio, la retta che unisce i punti di contatto è un diametro.

Teorema XIII.

Se due circonferenze si tagliano, la retta che unisce i centri è perpendicolare alla retta che unisce i punti d'intersezione e la divide in due parti eguali.

Se le due circonferenze ABC e DEF si tagliano nei punti B ed E , dico che la retta MN che unisce i centri è perpendicolare alla retta che unisce i punti d'intersezione B ed E e la divide in due parti eguali (*fig. 104*).

Infatti essendo BE una corda comune ai due cerchi, la retta che passa pel suo punto medio, passerà ancora dall'una e dall'altra parte pei centri; ma fra due punti M ed N non vi può essere che una sola retta MN ; quindi, per quello che innanzi si è dimostrato, questa retta è perpendicolare alla corda BE e la divide in due parti eguali.

Scolio. Allorquando due circonferenze hanno un punto di comune B fuori di una retta che unisce i loro centri e se da questo punto si tiri sopra della retta una perpendicolare BO e si prolunghi di una porzione eguale OE , le due circonferenze passeranno ancora pel punto E . Poichè essendo BO eguale ad OE il punto M sarà ad eguale distanza dei punti B ed E , quindi dal punto M come centro e col raggio MB descritta la circonferenza questa passerà anche pel punto E . Nello stesso modo, il cerchio descritto dal punto N come centro e col raggio NB passerà ancora pel punto E .

Corollario. Se le due circonferenze sono tangenti, il punto di contatto è situato sulla retta che unisce i loro centri e per conseguenza non hanno che questo solo punto di comune, perchè in caso contrario ne avrebbero due e quindi si taglierebbero.

Teorema XIV.

Se due circonferenze sono esterne, la distanza dei centri è maggiore della somma dei raggi.

Siano le due circonferenze ABC e DEF esterne, dico che la distanza dei centri MN è maggiore della somma dei raggi MO e GN (*fig. 405*).

Infatti, essendo $MN = MO + OG + GN$ se si toglie dalla seconda somma di questa eguaglianza la parte OG , che è la distanza fra le due circonferenze, si avrà $MN > MO + GN$, cioè la distanza dei centri maggiore della somma dei raggi. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è vera, e si enuncia: se la distanza dei centri di due circonferenze è maggiore della somma dei raggi, queste due circonferenze sono esterne. Poichè, se ciò non fosse vero, allora la somma dei raggi dovrebbe essere o eguale o maggiore della distanza dei centri; nel primo caso, le due circonferenze avrebbero un punto di comune e sarebbero tangenti esternamente, lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, le due circonferenze sarebbero o tangenti internamente o solamente interne, lo che è pure contro l'ipotesi.

Teorema XV.

Se due circonferenze sono interne, la distanza dei centri è minore della differenza dei raggi.

Siano le due circonferenze ABC e DNO interne, dico che la distanza dei centri MN è minore della differenza dei raggi NC ed MO (*fig. 406*).

Infatti, potendo essere il centro del cerchio esterno sulla circonferenza del cerchio interno, con maggior facilità si vedrà che $NM = NC - MO - OC$ togliendo dalla seconda parte di questa eguaglianza la quantità OC , che è la distanza delle due circonferenze rimarrà $NM < NC - MO$, cioè la distanza dei centri minore della differenza dei raggi.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è anche vera e si enuncia: se la distanza dei centri di due circonferenze è minore della differenza dei loro raggi, queste due circonferenze sono interne. Infatti, se questa distanza non fosse minore della differenza dei raggi allora dovrebbe essere o eguale o maggiore; nel primo caso, le due circonferenze sarebbero tangenti interne, lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, le due circonferenze si taglierebbero, lo che è puranche contro l'ipotesi.

Teorema XVI.

Se due circonferenze sono tangenti esternamente la distanza dei centri è eguale alla somma dei raggi.

Siano le due circonferenze ABC e DEF tangenti esternamente, dico che la distanza MN dei centri è eguale alla somma dei raggi MO ed ON (*fig. 107*).

Essendo il punto di contatto O , situato sulla medesima linea retta che unisce i centri delle due circonferenze, si avrà $MN = MO + ON$, vale a dire la distanza dei centri eguale alla somma dei raggi.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è puranche vera, e si enuncia: se la distanza dei centri di due circonferenze è eguale alla somma dei raggi, le due circonferenze sono tangenti esternamente. Infatti se questa distanza non fosse eguale alla somma dei raggi dovrebbe essere o maggiore o minore; nel primo caso, le due circonferenze non avrebbero nessun punto di contatto e sarebbero solamente esterne, lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, sarebbero o solamente interne, o tangenti internamente, lo che è pure contro l'ipotesi.

Teorema XVII.

Se due circonferenze sono tangenti internamente la distanza dei centri è eguale alla differenza dei raggi.

Siano le due circonferenze ABC e DMF tangenti internamente, dico che la distanza MN dei centri è eguale alla differenza dei raggi (*fig. 108*).

Potendo ancora essere il centro del cerchio esterno, sulla circonferenza del cerchio interno, si vedrà che $MN = MO - NO$, vale a dire la distanza dei centri eguale alla differenza dei raggi.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è anche vera e si enuncia: se la distanza dei centri di due circonferenze è eguale alla differenza dei raggi, queste due circonferenze sono tangenti internamente. Infatti se questa distanza non fosse eguale alla differenza dei raggi, dovrebbe essere o maggiore o minore; nel primo caso, le due circonferenze o sarebbero solamente esterne o si taglierebbero; nel secondo caso, sarebbero solamente interne, lo che è pure contro l'ipotesi.

Teorema XVIII.

Se due circonferenze si tagliano la distanza dei centri è nel tempo stesso minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza.

Siano le due circonferenze EFB ed ECB che si tagliano nei punti B ed E , dico che la distanza MN dei centri è minore della somma dei raggi MB ed NB ed è maggiore della loro differenza (*fig. 104*).

Infatti, la retta che unisce i centri diunito ai raggi MB ed NB tirati dai stessi centri al punto di contatto B, formano un triangolo di cui un lato qualunque è minore della somma degli altri due ed è maggiore della loro differenza; quindi preso il lato MN, che è la distanza dei centri, si vedrà che è minore di $MB + BN$ ed è maggiore di $MB - BN$, vale a dire minore della somma dei raggi e maggiore della loro differenza.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è vera, e può enunciarsi: se la distanza dei centri di due cerchi è minore della somma dei raggi e se nel tempo stesso il raggio maggiore è minore della somma del raggio minore e della distanza dei centri, le due circonferenze si taglieranno. Infatti, perchè abbia luogo la intersezione di queste due circonferenze bisogna che abbia luogo anche il triangolo BMN e quindi oltre che la distanza MN dev'essere minore di $MB + BN$, quanto deve essere ancora il raggio maggiore NB minore di $MB + MN$. Ma se il triangolo BMN non ha luogo, allora la distanza dei centri è o eguale, o maggiore della somma dei raggi; nel primo caso, le due circonferenze non avranno che un solo punto di comune e saranno tangenti esterne, lo che è contro l'ipotesi; nel secondo caso, non avranno nessun punto di comune e quindi saranno solamente esterne, lo che è pure contro l'ipotesi.

Teorema XIX.

Nello stesso cerchio o in cerchi eguali, se due angoli al centro stanno fra loro come due numeri interi, anche gli archi intercettati dai loro lati, staranno tra loro come gli stessi numeri interi; quindi gli angoli saranno proporzionali agli archi.

Siano due cerchi eguali (*fig. 409*) i cui angoli al centro BAC ed EDF stanno tra loro come i due numeri interi 4 e 3, dico che gli archi BC ed EF intercettati dai loro lati staranno tra loro come gli stessi numeri interi, quindi si avrà la proporzione *angolo BAC : angolo EDF :: arco BC : arco EF*.

Infatti i due angoli al centro BAC ed EDF per stare tra loro come due numeri interi, bisogna che ammettano una comune misura, e sia l'angolo M, questa comune misura, ora questo angolo deve essere contenuto quattro volte in BAC e tre volte in EDF, quindi diviso l'angolo BAC in quattro parti eguali ad M, e diviso l'angolo EDF in tre parti puranche eguali ad M, tutti gli angoli parziali BAM, MAN, NAO, OAC, EDP, PDQ, QDF saranno eguali tra loro, quindi si avrà *angolo BAC: angolo EDF :: 4: 3*; ma gli archi parziali BM, MN, NO, OC, EP, PQ, QF essendo eguali tra loro, l'arco BC essendo diviso in quattro parti eguali e l'arco EF in tre parti puranche eguali, si avrà *arco BC: arco EF :: 4: 3*. Per essere gli angoli nello stesso rapporto degli archi si avrà infine *angolo BAC: angolo EDF :: arco BC: arco EF*.
Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XX.

Reciprocamente nello stesso cerchio o in cerchi eguali, se due archi stanno tra loro come due numeri interi, anche gli angoli al centro che intercettano questi archi staranno tra loro come gli stessi numeri interi; quindi gli archi saranno proporzionali agli angoli.

Siano due cerchi eguali, i cui archi BC ed EF stanno tra loro come due numeri interi, dico che anche gli angoli al centro BAC ed EDF staranno tra loro come due numeri interi, quindi si avrà la proporzione *arco BC: arco EF :: angolo BAC: angolo EDF* (fig. 409).

Infatti per stare tra loro gli archi BC ed EF come due numeri interi, bisogna che essi abbiano una comune misura e quindi siano divisi in parti eguali; immaginando che l'arco BC sia diviso in quattro parti e l'arco EF in tre, si avrà la proporzione *arco BC: arco EF :: 4: 3*. Or se dai punti di divisione si tirino i raggi MA, NA, OA, PD e QD, l'angolo BAC sarà diviso in quattro angoli

eguali e l'angolo EDF in tre angoli parimente eguali, quindi si avrà *angolo BAC: angolo EDF:: 4: 3* paragonando queste due proporzioni e visto l'eguaglianza dei secondi rapporti, ne risulta la proporzione *arco BC: arco EF:: angolo BAC: angolo EDF*. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXI.

Due angoli stanno fra loro come gli archi compresi fra i loro lati descritti coi vertici degli angoli come centri e con lo stesso raggio.

Siano BAC e DEF due angoli qualunque, dico che staranno fra loro come gli archi BC e DF compresi fra i loro lati descritti coi vertici degli angoli A ed E come centri e con lo stesso raggio AB, di modo che si avrà la proporzione *angolo BAC: angolo DEF:: arco BC: arco DF* (fig. 110).

In effetti, se si suppone che questa proporzione non abbia luogo, rimanendo i medesimi tre primi termini il quarto proporzionale dovrebbe essere o maggiore o minore di DF; suppongasì che sia maggiore, e che sia eguale a DI. Si divida l'arco BC in tante parti eguali ciascuna minore di FI e si porti una di queste parti sull'arco DI, fra i punti F ed I cadrà un punto di divisione O e gli archi BC e DO ammetteranno una comune misura; quindi gli angoli che intercettano questi due archi, staranno fra loro nello stesso rapporto di questi stessi archi e si avrà la proporzione *angolo BAC: angolo DEO:: BC: DO*, ma per ipotesi si è detto che *angolo BAC: angolo DEF:: BC: DI*, dunque avendo queste due proporzioni gli stessi antecedenti i conseguenti daranno la proporzione *DEO: DEF:: DO: DI*; ma l'angolo DEO come tutto è maggiore della parte DEF, quindi dovrebbe anche DO essere maggiore di DI, cioè la parte maggiore del tutto, lo che è assurdo, dunque è anche

assurda l'altra proporzione $BAC:DEF::BC:DI$; per conseguenza resta la proporzione $BAC:DEF::BC:DF$. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è vera, poichè due archi stanno fra loro nello stesso rapporto degli angoli che intercettano questi archi, e che hanno il vertice al centro dei cerchi descritti con lo stesso raggio ed ai quali appartengono i medesimi archi.

Corollario. Gli archi essendo proporzionali agli angoli al centro che li intercettano, possono prendersi per misura degli stessi angoli. Ora essendo la circonferenza divisa in 360 gradi, gli archi saranno misurati a gradi, quindi gli angoli al centro che li intercettano avranno la stessa misura. Dividendo la circonferenza in quattro parti eguali si avranno quattro angoli retti al centro, quindi l'angolo retto avrà 90 gradi, l'angolo acuto da 1 a 89 gradi e l'angolo ottuso da 91 a 179 gradi, facendo però astrazione delle frazioni, le quali potranno sempre computarsi essendo ogni grado diviso in 60 minuti primo, ogni minuto primo in 60 secondi ecc.

Teorema XXII.

L'angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Sia l'angolo iscritto BAC , dico che avrà per misura la metà dell'arco BC compreso fra i suoi lati BA ed AC .

Possono darsi tre casi: — 1.° Quando il centro del cerchio è fra i lati dell'angolo — 2.° Quando il centro è su di un lato dell'angolo — 3.° Quando il centro è fuori dell'angolo.

Primo. Si tiri il diametro AM (fig. 444) ed i raggi BO ed OC . Il triangolo ABO essendo isoscele, l'angolo BAO è eguale alla metà dell'angolo esterno BOM ; similmente il triangolo ACO essendo puranche isoscele, l'angolo OAC eguale alla metà dell'angolo esterno MOC , quindi $BAO +$

OAC ovvero BAC è eguale a $\frac{BOM}{2} + \frac{MOC}{2}$ ovvero $\frac{BOC}{2}$

ma l'angolo al centro BOC ha per misura l'arco BC, quindi la sua metà BAC ha per misura la metà dell'arco BC.

Secondo. Si tiri il raggio BO (fig. 112), il triangolo ABO essendo isoscele, l'angolo BAO è eguale alla metà dell'angolo esterno BOC, ma questo angolo essendo al centro ha per misura l'arco BC, quindi l'angolo BAO ovvero BAC ha per misura la metà dell'arco BC.

Terzo. Si tiri il diametro AM (fig. 113), l'angolo BAM avendo per misura la metà dell'arco BM e l'angolo CAM avendo per misura la metà dell'arco CM, così l'angolo BAC differenza dei due angoli BAM e CAM avrà per misura la differenza della metà dei due archi BM e CM ovvero la metà dell'arco BC.

Resta dunque dimostrato che ogni angolo iscritto ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Corollario 1° — Tutti gli angoli, iscritti in uno stesso segmento di cerchio, come: BAC, BDC, BEC (fig. 114), sono eguali, perchè hanno la stessa misura, cioè la metà dell'arco BOC compreso fra i loro lati.

Corollario 2° — Tutti gli angoli iscritti in un semicerchio sono retti, perchè ciascuno di essi à per misura la metà della semicirconferenza.

Corollario 3° — Tutti gli angoli iscritti in un segmento maggiore del semicerchio sono acuti, perchè hanno per misura la metà dell'arco minore compreso fra i loro lati, la quale è minore della quarta parte della circonferenza.

Corollario 4° — Tutti gli angoli, iscritti in un segmento minore del semicerchio, sono ottusi, perchè hanno per misura la metà dell'arco maggiore compreso fra i loro lati, la quale è maggiore della quarta parte della circonferenza.

Teorema XXIII.

L'angolo formato da una tangente e da una corda ha per misura la metà dell'arco compreso fra i suoi lati.

Sia l'angolo BAC formato dalla tangente AC e dalla corda AB, dico che avrà per misura la metà dell'arco BOA compreso fra i suoi lati (*fig. 115*).

Si tiri il diametro AD; l'angolo DAC essendo retto ha per misura la metà dell'arco DOA e l'angolo BAD come iscritto ha per misura la metà dell'arco BD; quindi $\text{BAD} + \text{DAC}$ ovvero l'intero angolo BAC ha per misura la metà dell'arco BD più la metà dell'arco DOA, ovvero la metà dell'arco BOA. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. L'angolo formato da una tangente e da una corda è eguale a ciascuno degli angoli iscritti nel segmento di cerchio BEA formato dalla stessa corda AB; perchè essi hanno per misura la metà dello stesso arco BOA compreso fra i loro lati.

Teorema XXIV.

L'angolo formato da due seganti il cui vertice è nell'interno della circonferenza ha per misura la metà dell'arco concavo compreso fra i suoi lati, più la metà dell'arco convesso compreso fra i prolungamenti dei medesimi lati.

L'angolo COB formato dalle due seganti AB e CD il cui vertice O è nell'interno della circonferenza, dico che ha per misura la metà dell'arco CB compreso fra i suoi lati CO ed OB, più la metà dell'arco AD compreso fra i prolungamenti OA ed OD degli stessi lati (*fig. 116*).

Si tiri DB, nel triangolo DOB l'angolo esterno COB è eguale alla somma dei due angoli interni ODB ed OBD. Ma l'angolo ODB perchè iscritto ha per misura la metà

dell'arco CB e l'angolo OBD per essere similmente iscritto ha per misura la metà dell'arco AD; dunque l'angolo COB ha per misura $\frac{CB + AD}{2}$ cioè la metà dell'arco

concavo compreso fra i suoi lati, più la metà dell'arco convesso compreso fra i prolungamenti dei medesimi lati. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXV.

L'angolo formato da due seganti il cui vertice è fuori della circonferenza ha per misura la metà dell'arco concavo compreso fra i suoi lati, meno la metà dell'arco convesso compreso fra i medesimi lati.

Sia l'angolo BAC formato dalle due seganti BA e CA il cui vertice A è fuori della circonferenza, dico che ha per misura la metà dell'arco concavo BC compreso fra i suoi lati, meno la metà dell'arco convesso FE compreso fra gli stessi lati (*fig. 117*).

Si tiri la corda EB; l'angolo BAE è la differenza degli angoli ABE e BEC, ma l'angolo BEC perchè iscritto ha per misura la metà dell'arco BC e l'angolo ABE per essere similmente iscritto ha per misura la metà dell'arco EF, quindi l'angolo BAE ovvero BAC ha per misura BC — FE ovvero la metà dell'arco concavo meno la metà dell'arco convesso compresi fra i suoi lati.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. L'angolo formato da due tangenti, ha per misura la metà dell'arco concavo compreso fra i punti di contatto, meno la metà dell'arco convesso compreso fra gli stessi punti; infatti tirando fra questi punti una corda la dimostrazione è la stessa della precedente. Parimente l'angolo formato da una segante e da una tangente ha per misura la metà dell'arco concavo compreso fra i loro lati meno la metà dell'arco convesso compreso fra gli stessi lati.

Corollario. Il luogo geometrico dei vertici degli angoli eguali iscritti nello stesso segmento di cerchio, è l'arco di cerchio determinato dalla corda per i cui estremi passano i lati dei medesimi angoli. Infatti ogni angolo iscritto nel segmento di cerchio BEC (*fig. 118*) per essere eguale all'angolo BAC deve forzosamente tenere il suo vertice sull'arco BEC, perchè se lo ha fuori del segmento, come l'angolo BDC, sarà minore di BAC; se lo ha dentro dello stesso segmento, come l'angolo BMC, sarà maggiore di BAC.

Teorema XXVI.

In ogni quadrilatero iscritto in un cerchio gli angoli opposti sono supplementari.

Sia il quadrilatero ABCD iscritto in un cerchio, dico che gli angoli opposti sono supplementari (*fig. 119*).

Si tiri la diagonale AC, l'angolo ABC ha per misura la metà dell'arco ADC, e l'angolo ADC ha per misura la metà dell'arco ABC, quindi i due angoli opposti ABC ed ADC hanno per misura la metà della circonferenza ABCD e per conseguenza sono supplementari. Lo stesso è per gli altri angoli opposti DAB e DCB.

Resta dunque dimostrato che in ogni quadrilatero iscritto in un cerchio gli angoli opposti sono supplementari.

Scolio. La reciproca di questa proposizione è vera, e si enuncia nel seguente modo: se in un quadrilatero due angoli opposti sono supplementari questo quadrilatero è iscrivibile nel cerchio. Infatti dato il quadrilatero ABCD i cui angoli opposti ABC ed ADC siano supplementari dico che questo quadrilatero è iscrivibile nel cerchio. Or se per i punti A, B, C si faccia passare una circonferenza, si avrà che avendo l'angolo ABC per misura la metà dell'arco ADC, l'angolo ADC che è il suo supplemento deve avere la metà dell'angolo ABC, ma ciò non può aver luogo che quando il punto D si trova sull'arco ADC perchè è eguale a tutti gli angoli iscrivibili nello stesso segmento di cerchio; dunque la circonferenza passa per i quattro punti A, B, C, D ed il quadrilatero ABCD è iscrivibile nel cerchio.

Teorema XXVII.

Se si divida una circonferenza in parti eguali, le corde che uniscono i punti consecutivi di divisione, formano un poligono regolare iscritto, e le tangenti condotte pegli stessi punti formano un poligono regolare circoscritto.

Se una circonferenza $ABCDE$ si divida in parti eguali nei punti A, B, C, D, E , dico che le corde AB, BC, CD, DE, EA , che uniscono questi punti consecutivi di divisione formano il pentagono $ABCDE$ regolare iscritto e che le tangenti FG, GH, HI, IK, LF condotte per gli stessi punti di divisione formano il pentagono $FGHIL$ regolare circoscritto (*fig. 120*).

Primo. Essendo stata divisa la circonferenza $ABCDE$ in tante parti eguali, le corde AB, BC, CD, DE, EA che sottendono archi eguali sono fra loro eguali, dippiù gli angoli ABC, BCD, CDE, DEA, EAB sono parimente eguali, perchè hanno la stessa misura essendo iscritti in segmenti di cerchio eguali; dunque il poligono $ABCDE$ avendo gli angoli ed i lati eguali è regolare, ed iscritto.

Secondo. I triangoli AFB, BGC, CHD, DIE, ELA sono isosceli ed eguali, perchè le basi AB, BC, CD, DE, EA sono eguali per costruzione e gli angoli alle basi essendo formati da una tangente e da una corda hanno per misura la metà degli archi compresi fra i loro lati, ora questi archi sono tutti eguali, quindi essi hanno una comune misura e per conseguenza sono eguali; dall'eguaglianza di questi angoli ne nasce l'eguaglianza dei rimanenti lati, e degli angoli al vertice dei triangoli isosceli; dunque i lati del poligono circoscritto sono eguali perchè doppi di ciascun lato eguale dei triangoli isosceli eguali, resta perciò dimostrato che il pentagono $FGHIL$ circoscritto al cerchio, è regolare.

Corollario 1° — Allorquando si dà un poligono regolare iscritto, si può circoscrivere un poligono eguale di lati a quello iscritto conducendo per ogni vertice di questo poligono una tangente al cerchio. Similmente dato un poligono regolare circoscritto, si può iscrivere un poligono regolare di egual numero di lati, conducendo le corde fra i punti del cerchio di contatto coi lati del poligono circoscritto.

Corollario 2° — Allorquando si dà un poligono regolare iscritto, si può iscrivere un'altro poligono regolare di un numero doppio di lati e ciò dividendo per metà gli archi sottesi dai lati del poligono già iscritto, conducendo poscia le corde che sottendono la metà degli archi. Questa divisione eguale degli archi si ottiene abbassando dal centro del cerchio i raggi perpendicolari ai punti medi delle corde che sottendono gli archi da dividersi. Similmente dato un poligono regolare circoscritto, si può circoscrivere un poligono regolare di un numero doppio di lati e ciò col dividere gli archi compresi fra i punti di contatto delle tangenti colla circonferenza in due parti eguali, conducendo poscia per questi punti di divisione altrettante tangenti allo stesso cerchio. Questa divisione eguale degli archi, si ottiene conducendo dal centro del cerchio ai vertici degli angoli del poligono dato, altrettanti raggi.

Teorema XXVIII.

Se si ha una serie di poligoni regolari iscritti in un cerchio, nei quali il numero dei lati di ciascun di essi è successivamente doppio di quello degli altri, i loro perimetri e le loro superficie aumentano di più in più rimanendo però sempre rispettivamente minori della circonferenza e del cerchio.

Abbiassi una serie di poligoni regolari $ABC, ADBECF, AGDHBIE....$ iscritti nello stesso cerchio, nei quali, il numero dei lati del secondo è doppio di quello del primo, quello del terzo doppio di quello del secondo, dico che i loro perimetri e le loro superficie sono rispettivamente maggiori gli uni rispetto agli altri, ma però sono rispettivamente minori della circonferenza e del cerchio (*fig. 121*).

Infatti dalla formazione del triangolo ABC ne nasce l'esagono $ADBEFC$ e da questo il dodecagono $AGDHB...$ ora il perimetro di ciascuno di essi viene successivamente ad aumentarsi, perchè inviluppa l'altro in tutte le sue parti, quindi il perimetro del dodecagono è maggiore di quello dell'esagono e per conseguenza di quello del triangolo, ma per essere un poligono iscritto in un cerchio abbisogna che i vertici dei suoi angoli siano situati sulla circonferenza, quindi la circonferenza inviluppa il perimetro dell'ultimo poligono iscritto in tutte le sue parti e per conseguenza ne sarà maggiore.

Or aumentando i perimetri dei poligoni aumentano anche le superficie, perchè la parte è sempre minore del tutto, dunque qualunque possa essere il numero dei lati del poligono iscritto la sua superficie è sempre minore di quella del cerchio. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXIX.

Se si ha una serie di poligoni regolari circoscritti ad un cerchio nei quali il numero dei lati di ciascun di essi è successivamente doppio di quelli degli altri, i loro perimetri e le loro superficie diminuiscono di più in più rimanendo però sempre rispettivamente maggiori della circonferenza e del cerchio.

Se si ha una serie di poligoni regolari $ABCD$, $EFGH$, $IJKL$ ec. circoscritti allo stesso cerchio, in modo che il secondo abbia un numero doppio di lati di quello del primo, dico che il perimetro e la superficie del poligono $ABCD$ sono rispettivamente maggiori del perimetro e della superficie dell'ottagono $EFGHIJKLMN$, ma però tanto il perimetro dell'uno quanto quello dell'altro, non che le loro superficie, sono rispettivamente maggiori della circonferenza e del cerchio a cui sono circoscritti (*fig. 122*).

Infatti costruito il quadrato $ABCD$ e conducendo le tangenti EN , FG , IH , LM , pei punti medii degli archi BS , SI , IU , UR si viene a formare l'ottagono regolare

EFGHILMN, quindi la linea poligonale **ABCD** invilup-
perà l'altra **EFGHILMN** in tutte le sue parti e ne sarà
maggiore, ma il perimetro di questo ottagono essendo
circoscritto al cerchio, inviluppa la circonferenza in tutte
le sue parti, e quindi ne sarà puranche maggiore; dun-
que i perimetri dei poligoni circoscritti van sempre di-
minuendo con accrescere il numero dei lati restando però
sempre maggiori della circonferenza. Or poichè con ladi-
minuzione dei perimetri diminuiscono altresì le super-
ficie dei medesimi poligoni, dunque essi con l'aumento
dei lati diminuiscono di superficie, ma restano altresì
maggiori del cerchio, giacchè la parte è sempre minore
del tutto. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXX.

Le rette che dividono in due parti eguali gli angoli di un poli-
gono regolare iscritto o circoscritto, s'incontrano al centro del
cerchio e formano col perimetro tanti triangoli isosceli egua-
li, quanti sono i lati.

Sia il poligono **ABC** iscritto, e siano **OA**, **OB**, **OC** le
bisettrici degli angoli **A**, **B**, **C**, dico che queste rette
s'incontrano al centro del cerchio e formano col peri-
metro tre triangoli isosceli eguali (*fig. 125*).

Infatti nel triangolo **AOC** essendol'angolo **OAC** eguale
ad **OCA**, il lato **AO** è eguale al lato **OC**; similmente nel
triangolo **COB** essendo l'angolo **OCB** eguale ad **OBC** il
lato **OC** è eguale al lato **OB**, quindi le tre bisettrici **OA**,
OB ed **OC** sono eguali fra loro e per conseguenza il punto
O disterà egualmente dai tre punti **A**, **B**, **C**; ma per
tre punti dati non in linea retta, si può sempre far pas-
sare una circonferenza, dunque le bisettrici degli angoli
del poligono iscritto s'incontrano al centro del cerchio.
Or a causa della eguaglianza dei lati **AC**, **CB** e **BA** i tre
triangoli **AOC**, **COB** e **BOA** sono eguali fra di loro.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. L'angolo AOB formato da due bisettrici consecutive dicesi angolo al centro del poligono. Tutti gli angoli al centro dei poligoni regolari sono eguali e sono nello stesso numero dei lati dei rispettivi perimetri; quindi essendo la somma degli angoli al centro eguali a quattro angoli retti, così ciascun angolo al centro vale il quoziente di 360 diviso pel numero dei lati del poligono.

PROBLEMI

RELATIVI AL PRIMO ED AL SECONDO LIBRO

Problema I.

Dividere una data retta in due parti eguali.

Sia data la retta AB da dividersi in due parti eguali (*fig. 124*).

Dal punto estremo A come centro, e con un raggio maggiore della metà della data retta, si descrivono due archi di cerchio l'uno al disopra e l'altro al disotto di AB. Parimente dal punto estremo B come centro, e con lo stesso raggio, si descrivono egualmente due archi di cerchio; quelli descritti al disopra di AB si taglieranno nel punto C e quelli al disotto nel punto D, tra questi due punti si faccia passare la retta CD, dico che questa taglierà la data retta in due parti eguali.

Infatti, i due punti C e D trovandosi su due circonferenze descritte co'centri A e B e con gli stessi raggi, sono egualmente distanti dalle estremità della retta AB, quindi la retta CD passa pel punto medio E di AB e la divide in due parti eguali.

Problema II.

Da un punto dato sopra di una retta, tirare ad essa una perpendicolare.

Sia dato il punto C sulla retta AB, vogliasi tirare ad essa una perpendicolare (*fig. 125*).

Si prendono su questa retta due punti D e P, ciascuno egualmente distanti da C, indi da questi punti come centri, e con un raggio sufficientemente grande e maggiore di DC si descrivono due archi di cerchio i quali si taglieranno nel punto E; si faccia passare fra i punti C, E, la retta CE, dico che questa retta è la perpendicolare cercata.

Infatti, i due punti C ed E essendo per costruzione egualmente distanti da' punti D e P si troveranno sulla perpendicolare innalzata dal punto medio di DP, dunque CE è perpendicolare ad AB.

Scolio. La stessa costruzione serve per descrivere un angolo retto in un punto dato su di una retta.

Problema III.

Da un punto dato fuori di una retta, abbassare su questa retta una perpendicolare.

Sia il punto A fuori della retta BD vogliasi da questo punto abbassare la perpendicolare sulla BD (*fig. 126*).

Dal punto dato A, come centro, e con un raggio AF sufficientemente grande si descriva l'arco FG in modo che tagli la retta BD nei punti F e G; si divida la corda FG in due parti eguali nel punto H e fra i punti A ed H, si faccia passare la retta AH, dico che questa sarà la perpendicolare cercata. Infatti, essendo la distanza FH eguale ad HG, la retta AH abbassata dal centro del cerchio sulla corda FG divide questa corda in due parti eguali, quindi è ad essa perpendicolare; dunque AH è perpendicolare ancora alla retta BD.

Problema IV.

Alzare una perpendicolare all'estremità di una retta senza prolungarla.

Sia data la retta AB, e senza prolungarla, dal suo estremo B vogliasi tirare la perpendicolare (*fig. 127*).

Si prenda ad arbitrio il punto O fuori della data retta e si tiri OB, dal punto O come centro e col raggio OB, si descriva il cerchio EBD, è chiaro che la sua circonferenza passerà pei punti B e D; si tiri il diametro DC e si faccia passare fra i punti C e B la retta CB, dico che questa è la perpendicolare cercata.

Infatti, essendo DC un diametro, il segmento DBC è un semicerchio e l'angolo CBD è in esso iscritto; ma l'angolo iscritto nel semicerchio è retto, dunque l'angolo CBD è retto e CB è perpendicolare ad AB.

Scolio. La stessa costruzione serve per fare un'angolo retto all'estremità di una retta data.

Problema V.

Dividere un angolo dato in due parti eguali.

Sia dato l'angolo BAF, vogliasi dividere in due parti eguali (fig. 128).

Si prenda sul lato AB una parte AC, indi dal punto A come centro e col raggio AC si descriva l'arco CD che tagli anche l'altro lato AF nel punto D; si tiri la corda CD e si divida in due parti eguali nel punto H. Si faccia passare fra i punti A ed H la retta AH, dico che questa è la bisettrice dell'angolo BAF.

Infatti, essendo la retta AH tirata dal centro del cerchio al punto medio della corda CD, è perpendicolare a questa corda, dunque i due triangoli rettangoli ACH ed ADH sono eguali, perchè hanno l'ipotenusa AD eguale all'ipotenusa AC perchè raggi dello stesso cerchio, ed il cateto AH di comune, quindi essendo l'angolo DAH eguale all'angolo CAH la retta AH divide l'angolo BAF in due parti eguali.

Scolio. Con la stessa costruzione si può dividere un angolo in quattro, in otto ecc. parti eguali, dividendo successivamente ciascuna parte per metà.

Problema VI.

Da un punto dato sopra di una retta fare un'angolo eguale ad un'angolo dato.

Dal punto I sulla retta MH vogliasi fare un'angolo eguale all'angolo dato BAC (fig. 129).

Dal vertice A dell'angolo dato, come centro, e col raggio ad arbitrio AD si descriva un'arco di cerchio, in modo che tagli i lati AB ed AC ne' punti D ed E; si tiri la corda DE. Similmente dal punto I, dato sulla retta MH, come centro, e col raggio IG eguale ad AD, si descriva un arco di cerchio, e dal punto G come centro e col raggio GF eguale alla corda ED si descriva un'altro arco di cerchio; questi due archi si taglieranno nel punto F. Si

faccia passare fra i punti F ed I la retta FI, dico che l'angolo FIG è eguale a BAC.

Infatti i due archi ED e GF descritti con raggi eguali, avendo le corde eguali, sono eguali; quindi gli angoli al centro BAC ed FIG sono parimente eguali.

Problema VII.

Da un punto dato fuori di una retta, tirare una parallela a questa retta.

Dal punto O dato fuori della retta AB, vogliasi tirare a questa retta una parallela (*fig. 130*).

Dal punto O, preso come centro, e con un raggio sufficientemente grande si descriva l'arco EF, in modo che tagli la retta AB nel punto E; indi da questo punto come centro e con lo stesso raggio, si descriva l'arco di cerchio OG. Si tirino le due corde eguali GO e DE e si faccia passare fra i punti D ed O la retta DO, dico che questa è parallela ad AB.

Infatti, gli angoli OEG ed EOD, essendo al centro de' cerchi descritti con lo stesso raggio OE, ed intercettando archi eguali, sono eguali; ma essi sono alterni-interni rispetto alle due rette OD ed AB intersecate dalla terza OE, dunque OD è parallela ad AB.

Problema VIII.

Dati due angoli di un triangolo trovare il terzo.

Vogliasi trovare il terzo angolo di un triangolo essendo dati due A e B (*fig. 131*).

Dal punto C preso ad arbitrio su di una retta qualunque DF, si faccia l'angolo ICF eguale all'angolo minore B e dallo stesso punto C, si faccia sulla retta CI l'angolo ECI eguale all'altro angolo dato A, dico che l'angolo ECD è il terzo angolo del triangolo.

Infatti, la somma de' tre angoli di un triangolo essendo eguali a quella di due angoli retti, e la somma de' tre angoli DCE, ECI, ICF essendo benanche eguale a quella di due angoli retti, se si toglie da questa somma i due angoli ECI ed ICF che sono per costruzione rispettivamente eguali ai due angoli A e B del trian-

golo, rimarrà l'angolo DCE eguale al terzo angolo dello stesso triangolo.

Problema IX.

Dati due lati di un triangolo e l'angolo che essi comprendono, descrivere il triangolo.

Siano dati i due lati A e B e l'angolo C, che essi comprendono vogliasi descrivere il triangolo (*fig. 132*).

Si tiri una retta qualunque GH, si prenda su di essa una parte ME eguale al lato A ed al punto E si faccia l'angolo MED eguale all'angolo dato C. Si prenda sulla retta DE una parte OE eguale all'altro lato B, si tiri la retta OM, dico che OEM è il triangolo cercato.

Infatti, comechè un triangolo è determinato quando si hanno i due lati e l'angolo compreso, così il triangolo OEM avendo per costruzione il lato EM eguale ad A, il lato OE eguale a B e l'angolo E eguale a C è il triangolo cercato.

Problema X.

Dati due angoli di un triangolo ed il lato adiacente, descrivere il triangolo.

Siano dati i due angoli A e B ed il lato adiacente C, vogliasi descrivere il triangolo (*fig. 133*).

Si tiri una retta qualunque DE; si prenda su di essa una porzione GH eguale al lato C, si faccia al punto G l'angolo LGH eguale all'angolo A ed al punto H l'angolo FHG eguale a B; i lati HI e GI si taglieranno nel punto I, dico che IGH è il triangolo cercato.

Infatti, siccome un triangolo è determinato, quando si conoscono due angoli e un lato adiacente, così il triangolo IGH avendo per costruzione l'angolo IGH eguale ad A, l'angolo IHG eguale a B ed il lato GH ad essi adiacente eguale a C, è il triangolo cercato.

Scolio. Se i due angoli dati non fossero adiacenti allo stesso lato, ma uno adiacente e l'altro opposto, si cercherebbe in questo caso il terzo angolo e con la stessa costruzione si descriverebbe il triangolo.

Problema XI.

Dati i tre lati di un triangolo descrivere il triangolo.

Siano dati i tre lati A, B, C di un triangolo, vogliasi descrivere il triangolo (*fig. 134*).

Si tiri una retta qualunque MN e si prenda su di essa una porzione LH eguale ad A . Indi dal punto L come centro, e con un raggio eguale ad A , si descriva un'arco di cerchio, parimente dal punto H come centro e con un raggio eguale a B si descriva un'altro arco di cerchio che si taglierà col primo nel punto I ; si tirino le rette IL ed HI il triangolo LHI è quello che si cercava.

Infatti, questo triangolo avendo per costruzione tutti i tre lati rispettivamente eguali ai tre lati dati A, B e C , e siccome un triangolo è determinato quando sono dati tutti i tre lati, così esso è il triangolo cercato.

Scolio. Il problema è impossibile allorquando uno dei lati non è minore della somma degli altri due, oppure non è maggiore della loro differenza, giacchè le circonferenze descritte con i punti L ed H come centri e con i raggi rispettivamente eguali a due dei lati dati debbono forzosamente tagliarsi.

Problema XII.

Dati due lati di un triangolo e l'angolo opposto ad uno di essi, descrivere il triangolo.

Siano dati i due lati A e B e l'angolo C opposto al lato B , vogliasi descrivere il triangolo (*fig. 135*).

Possono darsi due casi: 1° o l'angolo dato è retto, oppure ottuso — 2° o è acuto.

Nel primo caso, bisogna che il lato, che si oppone all'angolo dato, sia maggiore dell'altro dato. Nel secondo caso, può il lato che si oppone al dato angolo, essere maggiore, minore o eguale rispetto all'altro. Ammesso che i lati dati soddisfino le condizioni richieste, si prenda su di una retta qualunque come DB un punto G e si faccia l'angolo EGB eguale a C , indi si prenda una porzione GF eguale ad A , dal punto F come centro e con un raggio eguale

a B si descriva un'arco di cerchio che tagli la retta GB nel punto H, si tiri la retta FH. Il triangolo FGH è quello cercato, perchè ha per costruzione il lato GF eguale ad A, il lato FH eguale a B e l'angolo FGH eguale a C.

Scolio. Alle sopradette condizioni si aggiunge, che il problema è impossibile se l'angolo C è acuto ed il lato FH non arrivi a toccare il lato GH.

Se l'angolo C è retto oppure ottuso ha sempre luogo la medesima costruzione.

Problema XIII.

Data l'ipotenusa di un triangolo rettangolo e la differenza che passa fra i due cateti descrivere il triangolo.

Sia data l'ipotenusa M e la differenza N che passa fra i due cateti vogliasi descrivere il triangolo rettangolo (fig. 136).

Si tiri una retta qualunque AB, si prenda su di essa una porzione AC eguale alla differenza N dei cateti, dal punto C s'innalzi la perpendicolare CD, indi si divida l'angolo DCB in due parti eguali per mezzo della retta CE; dal punto A come centro e col raggio eguale all'ipotenusa M si descriva una circonferenza che taglierà la retta CE nel punto F, da questo punto si abbassi la perpendicolare FG e si tiri AF, dico che AGF è il triangolo cercato.

Infatti essendo per costruzione l'angolo FCG semiretto è eguale a GFC, quindi GF è eguale a GC, ed AC è la differenza fra i due cateti AG e GF, ma AC è eguale ad N e l'ipotenusa AF è eguale ad M, dunque AGF è il triangolo rettangolo che si cercava.

Problema XIV.

Dato un cateto di un triangolo rettangolo e la differenza che passa fra l'ipotenusa e l'altro cateto descrivere il triangolo.

Sia dato il cateto R e la differenza S che passa fra l'ipotenusa e l'altro cateto vogliasi descrivere il triangolo rettangolo (fig. 137).

Si tiri una retta qualunque CD, si prenda su di essa una porzione CE eguale ad S, dal punto E s'innalzi la perpendicolare EF e si prenda su questa perpendicolare una porzione EH eguale al ca-

teto dato R; indi si tiri CH e dal punto medio di essa s'innalzi la perpendicolare OM che incontrerà la CD nel punto M, si tiri MH, dico che MEH è il triangolo cercato. Infatti essendo la retta OM perpendicolare a CH, il triangolo MCH è isoscele e per conseguenza MH è eguale ad MC, dunque CE che è per costruzione eguale ad S è la differenza fra il cateto EM e l'ipotenusa MH, ora il cateto EH è eguale ad R, dunque MEH è il triangolo rettangolo che si cercava.

Problema XV.

Dati due lati adiacenti e l'angolo compreso descrivere il parallelogrammo.

Siano dati i due lati adiacenti A e B e l'angolo C da essi compreso, vogliasi descrivere il parallelogrammo (fig. 138).

Prendasi sopra di una retta qualunque DM una porzione DE eguale ad A, e nel punto D facciasi l'angolo LDE eguale a C, indi si prenda sopra di LD una porzione DF eguale a B; dal punto F come centro e con un raggio eguale ad A si descriva un'arco, dal punto E come centro e con un raggio eguale a B si descriva un altro arco che taglierà il primo descritto nel punto O; si tirino le rette FO ed EO, il quadrilatero FDEO è il parallelogrammo cercato. Infatti esso ha per costruzione i lati opposti eguali, cioè DE eguale ad FO, FD eguale ad OE, dippiù i lati adiacenti DE e DF sono rispettivamente eguali ad A e B e l'angolo FDE è eguale a C.

Problema XVI.

Data la diagonale descrivere il quadrato.

Sia data la diagonale F, vogliasi descrivere il quadrato (fig. 139).

Si prenda la retta AC eguale ad F, e si divida in due parti eguali nel punto O; da questo punto come centro e col raggio OC si descriva una circonferenza, la quale passerà pei punti A e C. Si tiri il diametro DB perpendicolare ad AC, rimarrà il cerchio ADCB diviso in quattro parti eguali, si tirino le corde AB, BC, CD, DA, dico che il quadrilatero ABCD formato da queste corde è il quadrato cercato.

Infatti ciascuno degli angoli A, B, C, D , è retto, perchè iscritto in mezzo cerchio, ed i lati AB, BC, CD, DA essendo corde che sottendono archi eguali, sono eguali; dippiù essendo la diagonale AC eguale per costruzione ad F , $ABCD$ è il quadrato cercato.

Problema XVII.

Date le due diagonali descrivere il rombo.

Siano date le due diagonali R ed S , vogliasi descrivere il rombo (fig. 140).

Si prenda la retta AB eguale ad R e si divida in due parti eguali, indi dal punto O come centro e col raggio OB si descriva una circonferenza la quale passerà per i punti A e B ; si tiri il diametro EF perpendicolare ad AB e dal punto O si prenda sul raggio OE una parte OC eguale alla metà della diagonale data S , parimente si prenda sul raggio OF una parte OD eguale ad OC , si tirino le rette AC, CB, BD, DA , dico che il quadrilatero $ACBD$ formato da queste rette è il rombo cercato.

Infatti le due oblique AC e CB che distano egualmente dal piede della perpendicolare CO sono eguali, similmente le altre due oblique AD e DB che distano egualmente dal piede della perpendicolare DO sono eguali, ma CO è eguale ad OD , quindi le oblique AC, CB, BD, DE , sono eguali tra loro. Inoltre, ciascuno dei quattro angoli A, C, B, D , non avendo per misura la quarta parte della circonferenza non possono essere retti; dunque il quadrilatero $ACBD$ avendo i lati eguali senza avere gli angoli retti, e le diagonali AB e CD rispettivamente eguali ad R ed S , è il rombo cercato.

Problema XVIII.

Dato il valore comune delle due diagonali e l'angolo che fanno fra loro descrivere il rettangolo.

Sia M la somma delle due diagonali e l'angolo F che fanno fra loro, vogliasi descrivere il rettangolo (fig. 141).

Siccome le due diagonali di un rettangolo sono eguali, così si prenda la retta CB eguale alla metà di M e si divida in due parti eguali nel punto O ; da questo punto come centro e con un raggio

eguale ad OB , si descriva una circonferenza, la quale passerà pei punti C e B : indi al punto O facciasi l'angolo AOB eguale all'angolo dato F e si prolunghi AO fino all'incontro della circonferenza nel punto D . Dai punti A, B, C, D , si tirino le corde AB, BD, DC, CA , dico che il quadrilatero $ABDC$ formato da queste corde è il rettangolo cercato.

Infatti esso ha ciascuno degli angoli iscritti in mezzo cerchio, per conseguenza retti, dippiù la corda AB è eguale a CD , la corda BD è eguale a CA e la somma delle due diagonali AB e CD eguale ad M .

Problema XIX.

*Date le due diagonali e l'angolo compreso
descrivere il parallelogrammo.*

Siano R ed S le due diagonali ed M l'angolo compreso, vogliasi descrivere il parallelogrammo (*fig. 142*).

Si prenda la retta CB eguale alla diagonale maggiore S e si divida in due parti eguali nel punto O , da questo punto come centro e con un raggio eguale ad OB si descriva una circonferenza la quale passerà pei punti C e B , si tiri il diametro EF in modo che faccia col raggio OB l'angolo EOB eguale all'angolo dato M ; indi si prenda sopra di EO una porzione OA eguale alla metà di R e su di OF una porzione OD eguale all'altra metà di R , pei punti A, B, D, C si tirino le rette AB, BD, DC, CA , dico che $ABDC$ è il parallelogrammo cercato.

Infatti, si ha per costruzione, le due diagonali CB ed AD rispettivamente eguali alle due diagonali date, inoltre l'angolo AOB eguale ad M . Or essendo AO eguale ad OD e CO eguale ad OB le due diagonali si tagliano scambievolmente in parti eguali, ma esse però sono disuguali e non si tagliano ad angoli retti, dunque $ABDC$ è il parallelogrammo cercato.

Problema XX.

*Data la differenza tra la diagonale ed il lato di un quadrato
descrivere il quadrato.*

Sia S la differenza tra la diagonale ed il lato del quadrato, vogliasi descrivere il quadrato (*fig. 143*).

Si tiri una retta qualunque AB e si prenda su di essa una porzione AF eguale ad S , si tiri dal punto F la perpendicolare FD e si faccia al punto A l'angolo DAF eguale a tre quarti di un retto; indi si prenda FE eguale ad FD , si tiri la retta DE , dico che sarà la diagonale del quadrato cercato, quindi per mezzo di questa diagonale si descrivi il quadrato $DCEF$.

Infatti nel triangolo rettangolo AFD , l'angolo D è il complemento dell'angolo A , ma l'angolo EDF , essendo la metà di un angolo retto, l'angolo EDA è tre quarti di un retto ed è eguale all'angolo DAE ; quindi il lato DE essendo eguale al lato AE , la differenza fra la diagonale DE ed il lato EF è appunto la parte AF eguale ad S .

Problema XXI.

Dato un poligono descrivere un' altro eguale.

Sia dato il poligono $ABCDE$, vogliasi descrivere un altro poligono ad esso eguale (*fig. 144*).

Si prenda su di una retta qualunque una porzione FG eguale al lato AB del poligono dato e si faccia al punto G l'angolo FGH eguale all'angolo ABC e si prenda GH eguale a BC , si faccia al punto H l'angolo GHI eguale a BCD e si prenda HI eguale a CD ; si faccia dal punto I l'angolo III eguale a CDE e dal punto F l'angolo GFL eguale a BAE , i due lati IL ed LF s'incontreranno nel punto L , dico che $FGHIL$ è il poligono cercato.

Infatti esso ha per costruzione tutti i lati e gli angoli disposti nello stesso ordine ed eguali rispettivamente a tanti lati ed angoli del poligono $ABCDE$, eccetto i due lati consecutivi IL ed LF che debbono forzosamente essere eguali ai rimanenti lati AE ed ED , non che l'angolo ILF che del pari deve essere eguale all'altro DEA .

Problema XXII.

Trovare il centro di un cerchio o di un arco dato.

Sia dato il cerchio $ABCD$, vogliasi trovare il centro (*fig. 145*).

Si prendano sulla circonferenza, oppure sull'arco, se invece questo sia stato dato, tre punti ad arbitrio A , B , C , si tirino le corde AB e BC , si dividano queste corde in due parti eguali nei punti G ed H , e s'innalzino le perpendicolare GF ed HI , le quali

s'incontreranno nel punto O, dico che questo punto è il centro del cerchio o dell'arco dato.

Infatti la corda AB essendo divisa in due parti eguali, il punto O che esiste sulla perpendicolare innalzata dal punto medio H dista egualmente dalla estremità A e B: similmente lo stesso punto O che esiste sulla perpendicolare innalzata dal punto medio della corda CB dista egualmente dalle estremità C e B, ma due rette distinte non possono avere che un sol punto di comune, dunque il punto O è il centro del cerchio.

Scolio. La stessa costruzione serve per far passare per tre punti dati non in linea retta una circonferenza, e per circoscrivere un cerchio ad un triangolo dato che avesse avuto per vertici de'suoi tre angoli i tre punti A, B, C.

Corollario. Se vogliasi dividere un'arco come CB in due parti eguali, basta prolungare la perpendicolare OG innalzata dal punto medio G della corda CB fino all'incontro della circonferenza nel punto M, e si avrà $CM = MB$.

Problema XXIII.

Da un punto dato condurre una tangente ad un cerchio.

Possono darsi due casi o il punto è dato sulla circonferenza o fuori del cerchio (*fig. 146*).

Primo. Se il punto M è dato sopra la circonferenza si tiri il raggio OM e s'innalzi dal suo estremo la perpendicolare MC, dico che questa è la tangente richiesta, poichè si è già dimostrato che la perpendicolare condotta all'estremità del raggio è tangente alla circonferenza.

Secondo. Se il punto M è fuori del cerchio ABC, si tiri la retta OM, fra il punto M ed il centro O del cerchio, e si divida in due parti eguali nel punto I; indi da questo punto come centro e con il raggio IM si descriva una circonferenza che taglierà quella del cerchio ABC nei punti P ed R. Si tirino le rette PM ed RM ed entrambe sono tangenti al cerchio dato.

Infatti, tirati i raggi OP ed OR gli angoli OPM ed ORM sono retti perchè iscritti in mezzo cerchio, quindi PM è perpendicolare ad OP ed RM perpendicolare ad OR; dunque le due rette sono tangenti, perchè rispettivamente perpendicolari ai raggi.

Problema XXIV.

Tirare una tangente comune a due circonferenze date.

Siano date le due circonferenze ABC e DEF vogliasi tirare una tangente comune a queste due circonferenze (*fig. 147*).

Si descriva nel cerchio della circonferenza maggiore ABC, con lo stesso centro O e col raggio OG eguale alla differenza dei raggi delle due circonferenze, un'altra circonferenza GHI, e si conduca ad essa pel punto M una tangente MI. Dal punto di contatto I si conduca la retta OI perpendicolare ad MI, si tiri ME parallela ad OC e si faccia passare fra i punti C ed E la retta CE, dico che questa è la tangente cercata.

Infatti, la retta IM è parallela a CE, ma IC ed ME essendo perpendicolari ad IM sono benanche perpendicolari a CE, dunque questa retta essendo perpendicolare all'estremità dei due raggi delle circonferenze date è tangente a questa circonferenza.

Scolio. Con la stessa costruzione si possono tirare due tangenti, perchè potendosi dal punto M tirare due tangenti alla circonferenza il cui raggio è OG, così può condursi ancora alle due circonferenze date ABC e DEF l'altra tangente AD.

Questo problema diviene impossibile se la distanza de' centri è minore della differenza de' raggi, vale a dire allorquando le due circonferenze sono interne l'una all'altra.

Problema XXV.

Data una retta descrivere su di essa un segmento di cerchio nel quale tutti gli angoli in esso iscritti sieno eguali ad un'angolo dato.

Sia data la retta AB e l'angolo C, vogliasi descrivere un segmento nel quale tutti gli angoli in esso iscritti sieno eguali a C (*fig. 148*).

Si tiri una retta qualunque DC, si prenda su di essa una parte DM eguale ad AB e si faccia dal punto M l'angolo DMG eguale all'angolo dato C. Si tiri OM perpendicolare ad MG e dal punto medio della retta DM si tiri la perpendicolare RO, indi dal punto O d'incontro di queste due perpendicolari, preso come centro, e col raggio OM, si descriva una circonferenza; dico che DAM è il segmento cercato.

Infatti tirate le corde DA ed AM l'angolo DAM è eguale all'angolo DMG, perchè hanno per misura lo stesso arco DEM per essere il primo di essi iscritto nel segmento DAM ed il secondo formato dalla tangente MG e dalla corda DM; ma l'angolo DMG è eguale per costruzione all'angolo dato C; dunque anche l'angolo DAM è eguale a C, e per conseguenza qualunque angolo iscritto in quel segmento è eguale all'angolo dato C.

Scolio. Se l'angolo dato fosse retto, il segmento sarebbe il semicerchio descritto col raggio eguale alla metà della retta data AB.

Problema XXVI.

Iscrivere un cerchio in un triangolo dato.

Vogliasi inscrivere un cerchio nel triangolo dato ABC (fig. 149).

Si tirino le bisettrici AE e CD dei due angoli del triangolo, A e C, queste bisettrici si taglieranno nel punto O che sarà egualmente distante dai tre lati del triangolo. Si abbassino le perpendicolari OM, ON ed OR, dal punto O come centro e con un raggio eguale ad OM si descriva il cerchio la cui circonferenza passerà per i punti M, N, R, e quindi sarà iscritto nel triangolo ABC.

Infatti le perpendicolari OM, ON ed OR sono eguali, per essere il punto O equidistante dai lati del triangolo e perchè comune alle due bisettrici degli angoli A e C; quindi essendo i raggi perpendicolari ai tre lati del triangolo questi lati sono tangenti al cerchio.

Scolio 1°—Il punto O essendo egualmente distante dai tre lati del triangolo, appartiene alle bisettrici degli angoli del triangolo, dunque le tre bisettrici degli angoli di un triangolo concorrono in uno stesso punto.

Scolio 2°—Se l'enunciato del problema fosse stato: *Descrivere un cerchio tangente ai tre lati di un triangolo*, vi sarebbero state quattro soluzioni, che avrebbero egualmente soddisfatto l'enunciato problema. In effetti i lati del triangolo ABC possono prolungarsi tutti dall'una e dall'altra parte; si hanno perciò tre spazi, esterni GACF, ICBH ed EBAL nei quali, colle bisettrici degli angoli esterni, nati dai suddetti prolungamenti, si trovano i centri de' tre cerchi da descriversi e che diunito all'altro nell'interno del triangolo soddisfano egualmente le condizioni volute per la soluzione del problema.

Problema XXVII.

Date due rette, trovare un'altra retta che sia eguale alla semisomma o alla semidifferenza di quelle date.

Siano date le due rette AB e CD, vogliasi trovare un'altra retta che sia eguale 1° alla loro semisomma, 2° alla loro semidifferenza (fig. 150).

Primo. Si prenda sulla retta maggiore AB una parte AE eguale alla retta minore CD e la rimanente parte EB si divida in due parti eguali nel punto G, dico che AG è la semisomma delle due rette date AB e CD. Infatti si ha: $AG = AB - GB$ ed $AG = CD + GB$ sommando queste due eguaglianze si ottiene $2 AG = AB + CD$.

$$AB + CD \text{ e dividendo per } 2 \text{ si avrà } AG = \frac{AB + CD}{2}$$

Secondo. Fatta la medesima costruzione di sopra, dico che GB è eguale alla semidifferenza delle due rette AB e CD. Infatti si ha che $GB = \frac{1}{2} EB$, ma $AB - CD$ è eguale ad EB, dunque

$$GB = \frac{1}{2} (AB - CD).$$

Problema XXVIII.

Trovare due rette che la loro somma sia eguale ad una retta data e la loro differenza sia eguale ad un'altra retta puranche data.

Vogliansi trovare due rette 1° che la loro somma sia eguale ad AB, 2° che la loro differenza sia eguale a CD (fig. 151).

Si tiri una retta qualunque EH e su di essa si prenda una porzione EF eguale alla metà di AB, si prenda in seguito un'altra porzione FG eguale alla metà di CD, dico che EG è una delle rette cercate. Si tolga poscia dalla parte EF una porzione FI eguale ad FG, dico che EI è l'altra retta cercata.

Infatti $EG = \frac{AB + CD}{2}$ ed $EI = \frac{AB - CD}{2}$ sommando queste due uguaglianze si avrà $EG + EI = AB$ e sottraendo si avrà $EG - EI = CD$. Dunque la somma delle due rette EG ed EI è eguale ad AB e la differenza è eguale a DC.

Problema XXIX.

Trovare la massima comune misura di due rette, se l'abbiano, e per conseguenza il loro rapporto numerico.

Siano date le due rette AB e CD, vogliasi trovare la massima comune misura, se l'abbiano, e quindi il loro rapporto numerico (fig. 152).

Si porti la retta minore CD sulla maggiore AB, tante volte quanto vi può essere contenuta, può darsi che vi stia un'esatto numero di volte ed allora la CD è la comune misura, oppure lasci un resto ad essa minore; in questo secondo caso, suppongasi che vi stia tre volte col resto EB, si porti questo resto sulla CD, e si vegga quante volte vi è contenuto, suppongasi che vi sia contenuto tre volte senza alcun resto, allora la EB è la comune misura.

Infatti essendo EB contenuta tre volte in CD, sarà contenuta 10 volte in AB quindi le due rette AB e CD stanno fra loro come 10: 3.

Scolio. Se col procedimento dianzi indicato, non si arrivasse mai ad un resto che stia nel resto precedente un'esatto numero di volte, allora le due linee non ammettendo una comune misura si direbbero *incommensurabili*. Però se l'operazione si prolungasse indefinitamente, si otterrebbero de' resti tanto piccoli da trascurarsi; quindi, trascurando l'ultimo resto infinitamente piccolo, quello precedente servirebbe di comune misura e darebbe in tal modo in numero un approssimato rapporto delle due rette date.

Problema XXX.

Dati due angoli trovare la loro massima comune misura se l'abbiano, e per conseguenza il loro rapporto numerico.

Siano dati i due angoli A e B vogliasi trovare la loro massima comune misura, se esiste, e quindi il loro rapporto numerico (fig. 153).

Siccome un'arco di cerchio può essere applicato su di un'altro arco di cerchio dello stesso raggio siccome una linea retta su di

un'altra linea retta, così da' vertici A e B come centri e con raggi eguali si descrivino due archi di cerchio CD ed EF; procedasi come si è indicato nel problema precedente e si perverrà in tal modo ad ottenere la comune misura DI degli archi.

Or siccome il rapporto degli archi CD ed EF è uguale a quello degli angoli A e B, quindi tirata la retta AI l'angolo DAI è la comune misura dei due angoli dati, per conseguenza può stabilirsi ancora il loro rapporto numerico.

Scolio. Se i due archi CD ed EF fossero incommensurabili, allora col procedimento dianzi indicato si perverrebbe ad ottenere, disprezzando un resto infinitamente piccolo, un approssimato rapporto degli archi, e quindi degli angoli.

ESERCIZI

I.

Teoremi da dimostrare

1° La somma delle distanze da un punto preso fuori di un quadrilatero ai quattro vertici del medesimo, è maggiore della somma delle due diagonali.

2° La somma delle perpendicolari tirate da un punto preso nell'interno di un triangolo equilatero sui tre lati è costante. Dimostrare quali modificazioni subisce l'enunciato del teorema, quando il punto è preso fuori del triangolo.

3° La somma delle perpendicolari tirate da un punto preso sulla base di un triangolo isoscele agli altri due lati è costante, come ancora la differenza delle perpendicolari tirate da un punto preso sui prolungamenti della base di un triangolo isoscele agli altri due lati è costante.

4° La retta tirata fra i due punti medi di due lati di un triangolo, è eguale alla metà dell'altro lato, ed è ad esso parallela.

5° La mediana di un triangolo è minore della semisomma dei due lati che formano l'angolo da dove essa parte, ed è maggiore della loro semidifferenza.

6° In ogni triangolo la somma delle tre mediane è minore del perimetro ed è maggiore del semiperimetro del triangolo medesimo.

7° In ogni triangolo rettangolo l'angolo formato dalla mediana e dalla perpendicolare che partono dal vertice dell'angolo retto è eguale alla differenza dei due angoli acuti.

8° Il diametro del cerchio iscritto in un triangolo rettangolo è eguale alla differenza fra la somma dei cateti e l'ipotenusa.

9° La distanza da un punto preso sulla circonferenza circoscritta a un triangolo equilatero, al vertice opposto, è eguale alle somme delle distanze dallo stesso punto agli altri due vertici.

10° Due poligoni circoscritti sono eguali se le rette tirate dai centri de' cerchi iscritti ai vertici dei poligoni, sono rispettivamente eguali.

II.

Problemi da risolvere

1° Costruire un triangolo conoscendosi: — Una bisettrice e due angoli — Un lato, un angolo e la sua bisettrice — Un lato, uno degli angoli adiacenti e la bisettrice dell'altro angolo adiacente.

2° Costruire un triangolo essendosi dati due angoli ed un'altezza, o due altezze ed un angolo.

3° Costruire un triangolo essendosi dati due lati ed un'altezza, o un lato e due altezze.

4° Per un punto dato nell'interno di un angolo, tirare una retta in modo che faccia coi due lati un triangolo il cui perimetro sia eguale ad una retta data.

5° Costruire un quadrilatero conoscendosi i quattro lati ed una retta che unisce i punti medi de' due lati opposti.

6° Costruire un triangolo conoscendosi il perimetro, un angolo e il raggio del cerchio iscritto.

7° Con un dato raggio descrivere una circonferenza che passi per due punti dati, oppure che passi per un punto dato e che sia tangente ad un'altra circonferenza o ad una retta.

8° Iscrivere in una circonferenza data un trapezio, conoscendosi la somma o la differenza dei lati paralleli e la loro distanza.

LIBRO TERZO

AREE, EQUIVALENZA E SIMILITUDINE DELLE FIGURE PIANE.
TRASVERSALI NEL TRIANGOLO.

Teorema I.

I parallelogrammi che hanno basi eguali ed altezze eguali sono equivalenti.

Siano i due parallelogrammi $ABCD$ ed $ABFG$, che hanno la base comune AB e la medesima altezza FH , dico che essi sono equivalenti (*fig. 154*).

Avendo questi due parallelogrammi la medesima altezza FH , le altre basi DC e GF dovranno trovarsi sulla stessa linea retta DF . Or essendo per la natura de' parallelogrammi, AD eguale a BC , AG eguale a BF , dipiù l'angolo DAG eguale all'angolo CBF , perchè hanno i lati paralleli e diretti nello stesso verso, i due triangoli AGD e BFC avendo un'angolo eguale ad un'angolo, compresi fra lati rispettivamente eguali, sono eguali; quindi, se dal quadrilatero $ABFD$ si tolga soltanto il triangolo AGD , rimarrà il parallelogrammo $ABFG$, e se dallo stesso quadrilatero si tolga soltanto il triangolo BCF , rimarrà il parallelogrammo $ABCD$; dunque le superficie dei due parallelogrammi $ABCD$ ed $ABFG$ essendo reste di grandezze eguali sottratte da una medesima grandezza, sono eguali, per conseguenza il parallelogrammo $ABCD$ è equivalente al parallelogrammo $ABFG$. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Ogni parallelogrammo è equivalente al rettangolo o al quadrato della medesima base e della stessa altezza.

Teorema II.

Ciascun triangolo è metà del parallelogrammo che ha la medesima base e la medesima altezza.

Sia il triangolo ABC , che abbia la stessa base BC e la medesima altezza del parallelogrammo $ABCE$, dico che questo triangolo è metà del parallelogrammo (*fig. 455*).

Infatti, avendo il triangolo ABC anche il lato AB di comune col parallelogrammo $ABCE$ è chiaro che l'altro lato AC è la diagonale che divide il parallelogrammo in due triangoli ABC ed ACE eguali, quindi ABC è metà di $ABCE$.

Se il triangolo ABC (*fig. 456*) avesse soltanto la stessa base e la stessa altezza del parallelogrammo $BCEF$ senza avere null'altro di comune, allora si tiri dal punto C la retta CG parallela ad AB e si prolunghi AE fino all'incontro della retta CG , ne nasce il parallelogrammo $ABCG$; ora il triangolo ABC avendo il lato AB di comune col parallelogrammo $ABCG$, la stessa base BC e la medesima altezza AD , è metà di questo parallelogrammo, ma $ABCG$ è equivalente ad $FBCE$, perchè hanno la base BC di comune e la medesima altezza AD , dunque il triangolo ABC è puranche metà del parallelogrammo $FBCE$.

Corollario 1° — Un triangolo qualunque è puranche metà del rettangolo, o del quadrato, quando hanno la stessa base e la medesima altezza; poichè si è visto che ciascun rettangolo o ciascun quadrato è equivalente al parallelogrammo della stessa base e della stessa altezza.

Corollario 2° — Un triangolo qualunque è equivalente ad un parallelogrammo, rettangolo, o quadrato, quando ha la stessa base e la metà della loro altezza.

Teorema III.

Se due triangoli hanno le basi eguali situate sopra di una stessa linea retta e la medesima altezza, sono equivalenti, e la congiungente de' loro vertici è parallela alle loro basi.

Siano i due triangoli ABC e DCE , che abbiano le basi BC e CE situate sulla stessa linea retta BE e la medesima altezza AC , dico che essi sono equivalenti e la congiungente AD de' loro vertici è parallela alle basi BC e CE (fig. 457).

Infatti si tirino le rette EG e BF parallele a CD e si prolunghi AD dall'una e dall'altra parte fino all'incontro delle rette BF ed EG , il parallelogrammo $CEGD$ è doppio del triangolo DCE , perchè ha la medesima base CE e la medesima altezza AC ; parimente il parallelogrammo $BCDF$ è doppio del triangolo ABC perchè ha la medesima base BC e la medesima altezza AC , ma i due parallelogrammi $CEGD$ e $BCDF$ a causa della comune altezza AC e della eguaglianza delle basi BC e CE sono equivalenti, quindi sono benanche equivalenti i due triangoli ABC e DCE .

Ora se la congiungente AD non fosse parallela alle basi, sia per ipotesi AO questa parallela. Si tiri la retta OE ; il triangolo ABC è equivalente al triangolo OCE , perchè hanno le basi eguali, e situati tra le medesime parallele BE ed AO ; ma il triangolo ABC si è dimostrato precedentemente equivalente al triangolo DCE , quindi sarebbe DCE eguale ad OCE , cioè la parte eguale al tutto, lo che è impossibile, quindi è parimente impossibile che AD non sia parallela a BC . Resta dunque dimostrato che se due triangoli hanno le basi eguali situate sopra di una stessa linea retta e la medesima altezza, sono equivalenti, e la congiungente de' loro vertici è parallela alle loro basi.

Teorema IV.

Due rettangoli che hanno la medesima altezza stanno fra loro come le basi.

Siano i due rettangoli $ABCD$ ed $EFGH$ che hanno la medesima altezza AB dico che essi stanno fra loro come le basi BC ed FG (*fig. 458*).

Suppongasi che le basi de' due rettangoli siano commensurabili e che la loro massima comune misura sia BM contenuta tre volte in $ABCD$ e due volte in $EFGH$; essi stanno tra loro nello stesso rapporto come $3:2$. Si divida la base BC in tre parti eguali BM , MP e PC e la base FG in due parti eguali FI ed IG , si tirino ai punti di divisioni le rette MO , PR ed IN ; il rettangolo $ABCD$ rimarrà diviso in tre rettangoli parziali e l'altro $EFGH$ in due rettangoli parziali, quindi si avrà la proporzione $ABCD:EFGH::3:2$ e sostituendo al secondo rapporto di questa proporzione le basi BC ed FG , si avrà $ABCD:EFGH::BC:FG$.

Se le basi BC ed FG fossero incommensurabili la proporzione $ABCD:EFGH:BC:FG$ avrebbe sempre luogo (*fig. 459*). Poichè se ciò non fosse vero, rimanendo i stessi primi tre termini, il quarto proporzionale FG dovrebbe essere o maggiore o minore. Ammesso in primo luogo che fosse minore e che in sua vece stasse FO , allora $ABCD:EFGH::BC:FO$.

Dividasi la base BC in tante parti eguali ciascuna minore di OG , parimente, portando una di queste parti sulla retta FO tante volte quanto può esservi contenuta, fra i punti O e G dovrà cadere forzosamente un punto di divisione e sia I ; tirisi HM parallela ed FO , OM ed IP . I due rettangoli $ABCD$ ed $EFIP$ essendo commensurabili ed avendo la stessa altezza staranno tra loro come le basi, sicchè si avrà $ABCD:EFIP::BC:FI$. Paragonando questa proporzione con l'altra precedente e visto che gli

antecedenti sono eguali, i conseguenti staranno in proporzione, di maniera che $EFGH:EFIP::FO:FI$. Ora essendo il rettangolo $EFGH$ minore del rettangolo $EFIP$, per potere sussistere la proporzione dovrebbe essere anche FO minore di FI , cioè il tutto minore della parte, lo che è impossibile, dunque non può il rettangolo $ABCD$ stare al rettangolo $EFGH$ come la base BC ad una retta maggiore di FG ; similmente si dimostra che lo stesso rettangolo non può stare all'altro come la base BC ad una retta minore di FG , quindi si ha $ABCD:EFGH::BC:FG$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — I rettangoli di eguale base stanno tra loro come le altezze. Poichè potendosi nel rettangolo prendere per base qualunque lato, così potranno scambiarsi fra loro la base e l'altezza.

Corollario 2° — Due parallelogrammi aventi le medesime basi stanno fra loro come le altezze e ciò a causa dell'equivalenza che hanno con i rettangoli di eguali basi e di eguali altezze.

Teorema V.

Due rettangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Siano i due rettangoli $ABCD$ e $CEFG$, dico che stanno tra loro come i prodotti delle basi BC e CG per le rispettive altezze CD e CE , sicchè si avrà $ABCD:CEFG::BC \times CD:CG \times CE$ (fig. 460).

Disposti i due rettangoli in modo che abbiano gli angoli ECG e BCD opposti al vertice, si prolunghino i lati AD ed FE fino al loro incontro nel punto H , ne nascerà il nuovo rettangolo $DCEH$. Ora i due rettangoli $ABCD$ e $DCEH$ avendo la stessa altezza DC stanno fra loro come le basi BC e CE , quindi si avrà la proporzione $ABCD:DCEH::BC:CE$. Parimente i due rettangoli $CEFG$ e $CDEH$ avendo la stessa altezza EC stanno tra loro come le basi GC e CD , e si avrà la proporzione $CDHE:CEFG::$

CD:CG. Moltiplicando queste due proporzioni tra loro, termine a termine, ed osservando che DCEH può omettersi perchè moltiplicatore comune de' termini del primo rapporto, risulterà dunque $ABCD:CEFG::BC \times CD:CG \times CE$. Resta perciò dimostrato: che due rettangoli qualunque stanno tra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze.

Corollario. Due parallelogrammi qualunque stanno fra loro come i prodotti delle basi per le rispettive altezze, e ciò come già si è notato a causa dell'equivalenza che essi hanno con i rettangoli di eguali basi e di eguali altezze.

Scolio. La superficie de' rettangoli è sempre misurata dal prodotto della base per la rispettiva altezza. Quindi prendendo per unità di misura il metro e supponendo che abbiasi un rettangolo la cui base misurata è eguale a metri 3. 20 e la sua altezza a metri 2. 50, la sua superficie è eguale a $3. 20 \times 2. 50$, eguale a metri quadrati 7. 00.

Teorema VI.

La superficie di un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Sia il parallelogrammo ABCD, che abbia per altezza GH, dico che presa AB per base, la superficie di questo parallelogrammo è eguale ad $AB \times GH$ (fig. 464).

Si tiri BO perpendicolare ad AB, dal punto A si tiri AM parallela a BO e si prolunghi CD fino all'incontro della retta BO. Il rettangolo ABOM è equivalente al parallelogrammo ABCD perchè ha la stessa base AB e la medesima altezza GH. Ma la superficie di questo rettangolo è eguale ad $AB \times GH$ quindi anche la superficie del parallelogrammo è eguale ad $AB \times GH$. Dunque rimane dimostrato che la superficie di un parallelogrammo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la sua altezza.

Teorema VII.

La superficie di un triangolo qualunque è eguale al prodotto della sua base per la metà della sua altezza.

Sia ABC un triangolo ed AD la sua altezza, dico che la sua superficie è eguale a $BC \times \frac{1}{2} AD$ (*fig. 455*).

Infatti essendo il triangolo ABC metà del parallelogrammo $ABCE$, che ha la stessa base BC e la medesima altezza AD , e la superficie del parallelogrammo essendo misurata da $BC \times AD$ così la superficie del triangolo sarà misurata dalla metà di questo prodotto ovvero da $BC \times \frac{1}{2} AD$. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. I triangoli della stessa base stanno tra loro come le altezze, e quelli della stessa altezza stanno tra loro come le basi, perchè ciascuno di essi è metà del parallelogrammo o del rettangolo che hanno la medesima base e la medesima altezza.

Teorema VIII.

La superficie di un trapezio è eguale al prodotto della semisomma delle basi parallele per la sua altezza.

Sia $ABCD$ un trapezio dico che la sua superficie è eguale ad $\frac{AD + BC}{2} \times EG$ (*fig. 462*).

Dal punto O medio del lato DC si faccia passare una retta FI parallela ad AB e si prolunghi AD fino all'incontro della retta FI ; essendo il triangolo DOI eguale al triangolo FOC il trapezio $ABCD$ è equivalente al parallelogrammo $ABFI$. Ora essendo la somma delle due rette AI e BF eguale a quella delle due rette AD e BC , e BF eguale ad AI , ne nasce che BF è la semisomma delle due rette AD e BC ; ma la superficie del parallelogrammo $ABFI$ è eguale a $BF \times EG$, sarà ancora la superficie del trapezio che è equivalente allo stesso pa-

rallelogrammo eguale a $BF \times EG$, ovvero eguale ad $\frac{AD + BC}{2} \times EG$. Dunque la superficie di un trapezio è eguale al prodotto della semisomma delle basi parallele per la sua altezza.

Corollario. La superficie di un trapezio è anche eguale al prodotto della sua altezza per la retta che unisce i punti medi dei lati non paralleli, giacchè questa retta è eguale alla semisomma delle basi parallele.

Teorema IX.

La superficie di un poligono regolare è eguale al prodotto del perimetro per la metà dell'apotema.

Sia il poligono regolare $ABCDEF$; dico che la sua superficie è eguale al prodotto del perimetro moltiplicato per la metà dell'apotema MG (*fig. 163*).

Infatti si tirino dal centro M le rette MA, MB, MC, MD, ME, MF ; il poligono $ABCDEF$ rimane diviso in tanti triangoli ciascuno dei quali ha per base uno dei lati del poligono e per altezza l'apotema MG ; ma la superficie di un triangolo qualunque è eguale al prodotto della base per la metà dell'altezza, e tutti i triangoli AMB, BMC, CMD, DME, EMF ed FMA , formano l'intero poligono $ABCDEF$, così la superficie di questo poligono sarà eguale alla somma de' lati moltiplicata per la metà dell'apotema MC . Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La superficie di un poligono circoscritto ad un cerchio è eguale al prodotto del perimetro per la metà del raggio del cerchio iscritto; poichè dividendo il dato poligono in tanti triangoli quanti sono i lati, con rette che partano dal centro e terminano ai vertici dei suoi angoli, l'altezza di ciascun triangolo è il raggio del cerchio iscritto, quindi sommando come già si è fatto pel poligono $ABCDEF$ tutte le superficie dei triangoli parziali, si avrà che la superficie del poligono circoscritto è eguale al prodotto del perimetro per la metà del raggio del cerchio iscritto.

Corollario. La superficie di un poligono qualunque è eguale alla somma della superficie de' triangoli parziali che si ottengono per mezzo delle diagonali tirate da uno dei vertici del dato poligono.

Teorema X.

La retta tirata parallelamente alla base di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Sia la retta DE parallela alla base BC del triangolo ABC , dico che divide gli altri due lati AB ed AC in parti proporzionali (*fig. 464*).

Si tirino le rette BE e DC ; i due triangoli BDE e CED sono equivalenti perchè hanno la stessa base DE e la medesima altezza per essere i due vertici B e C situati sulla stessa retta BC parallela alla base DE . Ora i due triangoli EAD ed EBD avendo lo stesso vertice E e la medesima altezza stanno fra loro come le basi AD e DB dimodochè si ha la proporzione $EAD : EBD :: AD : DB$. Similmente i due triangoli EAD DCE avendo lo stesso vertice D e la medesima altezza stanno fra loro come le basi AE ed EC , e si ha la proporzione $EAD : DEC :: AE : EC$; ma il triangolo EBD è equivalente al triangolo EDC quindi a causa del rapporto comune in queste due proporzioni si ha $AD : DB :: AE :: EC$. Resta perciò dimostrato che la retta tirata parallelamente alla base di un triangolo divide gli altri due lati in parti proporzionali.

Corollario 1° — Componendo la proporzione $AD : DB :: AE : EC$ si ha $AD + DB : AD :: AE + EC : AE$ ovvero $AB : AD :: AC : AE$ similmente si può ottenere $AD + DB : DB :: AE + EC : EC$, ovvero $AB : DB :: AC : EC$.

Corollario 2° — Due o più rette parallele intercettano sopra due altre rette qualunque segmenti proporzionali; poichè se queste due ultime linee vanno ad incontrarsi in un punto, avranno luogo dei triangoli, nei quali le rette parallele taglieranno i due lati in segmenti proporzionali.

Teorema XI.

Reciprocamente se i lati di un triangolo sono tagliati in parti proporzionali, la retta che taglia questi lati è parallela alla base del triangolo.

Se i lati AB ed AC del triangolo ABC sono tagliati in parti proporzionali, in modo che si ha la proporzione $AD:DB::AE:EC$, dico che la retta DE è parallela alla base BC (*fig. 465*).

Supponiamo invece, che la retta DE non sia parallela a BC e sia per ipotesi DI parallela a BC si avrà per conseguenza la proporzione $AD:DB::AI:IC$. Ma nell'enunciato del teorema si è detto che $AD:DB::AE:EC$, quindi avendo queste due proporzioni il primo rapporto comune, gli altri rapporti staranno in proporzione e si avrà $AI:IC::AE:EC$. Or siccome AI è maggiore di AE , dovrebbe essere ancora IC maggiore di EC , cioè la parte maggiore del tutto, lo che è impossibile, dunque è parimente impossibile che possa esservi un'altra retta differente di DE parallela a BC . Resta perciò dimostrato che se due lati di un triangolo sono tagliati in parti proporzionali la retta che taglia questi lati è parallela alla base.

Teorema XII.

Due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali e sono simili.

Siano i due triangoli ABC e DEF che abbiano l'angolo $A=D$, $B=E$, $C=F$, dico che i lati omologhi danno la proporzione $AB:DE::AC:DF::BC:EF$ ed i due triangoli sono simili (*fig. 466*).

Si prenda sul lato AB una parte AG eguale a DE , e sul lato AC una parte AI eguale a DF ; si tiri GI . I due triangoli AGI e DEF avendo un angolo eguale ad un'an-

golo compresi fra lati rispettivamente eguali sono eguali, quindi GI è eguale ad EF . Siccome l'angolo G è eguale all'angolo E , l'angolo B è eguale all'angolo G , per la stessa ragione l'angolo C è eguale all'angolo I e GI è parallela a BC , dunque $AB:AG::AC:AI$, ovvero $AB:DE::AC:DF$.

Inoltre si tiri IM parallela a GB , si avrà la proporzione $AC:AI::BC:BM$, ma il quadrilatero $GIMB$ avendo i lati opposti paralleli è un parallelogrammo, quindi BM è eguale a GI ; dunque $AC:AI::BC:GI$ ovvero $AC:DF::BC:EF$.

Paragonando le due proporzioni $AB:DE::AC:DF$ ed $AC:DF::BC:EF$, a causa del rapporto comune $AC:DF$, si deduce $AB:DE::AC:DF::BC:EF$. Quindi i due triangoli ABC e DEF essendo equiangoli ed avendo i lati omologhi proporzionali sono simili. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. In due triangoli simili i lati omologhi sono gli opposti degli angoli eguali; or se l'angolo C si suppone eguale ad E , il lato AB è omologo a DF , così per gli altri lati; quindi conosciuti i lati omologhi, si ottiene la proporzione nello stesso modo come precedentemente si è dimostrato.

Corollario. Due triangoli per essere simili basta che abbiano due angoli rispettivamente eguali a due angoli.

Teorema XIII.

Due triangoli che hanno i lati omologhi proporzionali sono equiangoli e perciò simili.

Siano i due triangoli ABC e DEF , che abbiano i lati omologhi proporzionali, in modo che si abbia la proporzione $AB:DE::AC:DF::BC:EF$ dico che essi sono equiangoli e perciò simili (*fig. 166*).

Si prenda sopra di AB una parte AG eguale a DE e su di AC una parte AI eguale a DF , si tiri GI . Poichè

$AB:DE::AC:DF$ si avrà per conseguenza $AB:AG::AC:AI$, quindi GI è parallela a BC , ed i due triangoli ABC ed AGI , essendo equiangoli daranno puranche la proporzione $AB:AG::AC:AI::BC:GI$. Paragonando fra loro le due proporzioni:

$$\begin{aligned} AB:AG::AC:AI::BC:GI \\ AB:DE::AC:DF::BC:EF \end{aligned}$$

e visto che gli antecedenti di ciascun rapporto sono eguali due a due, i conseguenti sono proporzionali; ma AG è eguale a DE , quindi AI è eguale a DF e GI è eguale ad EF , dunque i due triangoli AGI e DEF sono eguali, perchè hanno i tre lati rispettivamente eguali. Ora dall'eguaglianza di questi triangoli ne nasce, che i loro angoli sono benanche eguali, per conseguenza i due triangoli AGI e DEF sono equiangoli. Ma si è dimostrato che i triangoli ABC ed AGI sono equiangoli, dunque i due triangoli ABC e DEF sono benanche equiangoli, e perciò simili. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XIV.

Due triangoli che hanno un angolo eguale ad un angolo compresi fra lati proporzionali sono equiangoli e perciò simili.

Siano i due triangoli ABC e DEF che abbiano l'angolo A eguale all'angolo D ed i lati proporzionali cioè $AB:DE::AC:DF$, dico che essi sono equiangoli e perciò simili (*fig. 466*).

Si prenda sopra di AB una parte AG eguale a DE e si tiri GI parallela al lato BC . Siccome il triangolo AGI è equiangolo al triangolo ABC perchè l'angolo IGA è eguale all'angolo CBA , si avrà la proporzione $AB:AG::AC:AI$; ma si è detto che $AB:DE::AC:DF$, quindi paragonando queste due proposizioni, e visto che gli antecedenti sono eguali due a due, i conseguenti stanno

in proporzione, e si ha $AG:DE::AI:DF$. Ora AG è per costruzione eguale a DE , dunque AI è eguale a DF ed i due triangoli AGI e DEF sono eguali, perchè hanno un'angolo eguale ad un angolo compresi fra lati rispettivamente eguali; ma si è dimostrato che AGI è equiangolo ad ABC , dunque ABC è equiangolo a DEF e per conseguenza questi due triangoli sono simili. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XV.

Due triangoli che hanno i lati rispettivamente paralleli sono simili.

Siano i due triangoli ABC e DEF che hanno il lato AB parallelo a DE , il lato AC parallelo a DF ed il lato BC parallelo ad EF , dico che essi sono simili (*fig. 166*).

Infatti essendo i lati AB ed AC rispettivamente paralleli a DE e DF , l'angolo BAC è eguale all'angolo EDF ; parimente essendo il lato BC parallelo ad EF , l'angolo ABC è eguale a DEF , quindi il terzo angolo ACB del primo triangolo è eguale al terzo angolo EFD del secondo triangolo, dunque i due triangoli ABC e DEF avendo tutti gli angoli rispettivamente eguali sono equiangoli e perciò simili. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Allorquando due triangoli come ABC e DEF hanno i lati rispettivamente paralleli, ha sempre luogo la proporzione $AB:DE::AC:DF::BC:EF$ perchè i lati omologhi sono i paralleli.

Teorema XVI.

Due triangoli che hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno sono simili.

Siano i due triangoli ABC e DEF , che abbiano il lato DE perpendicolare ad AB , il lato FD ad AC , ed il lato EF a BC , dico che questi due triangoli sono simili (*fig. 167*).

Infatti, si prolunghino i lati del triangolo DEF in modo che incontrino quelli del triangolo ABC nei punti I, G ed H, nel quadrilatero AHDI la somma dei quattro angoli è eguale a quella di quattro retti e siccome i due angoli DHA e DIA sono retti, la somma dei rimanenti due angoli IAH ed IDH è eguale a quella di due retti: ma la somma dei due angoli adiacenti EDF ed IDH è anche eguale a quella di due angoli retti, quindi dalle due somme eguali $IAH + IDH$ ed $EDF + IDH$ tolto di comune l'angolo IDH rimane IAH eguale ad EDF. Parimente si dimostra come l'angolo E è eguale all'angolo B, e l'angolo F è eguale all'angolo C; dunque i due triangoli ABC e DEF sono equiangoli, e per conseguenza simili. Resta perciò dimostrato, che due triangoli che hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno sono simili.

Scolio. Se il triangolo EDF fosse stato fuori del triangolo ABC, come il triangolo E'D'F', e che avesse avuto i lati perpendicolari ad ABC, si sarebbe costruito in tal caso, nell'interno di questo triangolo, un'altro simile ad E'D'F' e che avrebbe avuto i lati ad esso paralleli. È chiaro che a causa delle parallele, i lati del triangolo EDF sarebbero stati perpendicolari a quelli di ABC, quindi giusta la precedente dimostrazione il triangolo EDF sarebbe stato simile ad ABC, ma EDF ed E'D'F' perchè equiangoli sarebbero risultati simili, dunque anche E'D'F' sarebbe stato simile ad ABC.

Corollario 1° — Nei due triangoli simili ABC ed E'D'F' i lati omologhi sono i perpendicolari, quindi $AB:D'E':::AC:F'D':::BC:F'E'$.

Corollario 2° — Dalle cinque precedenti proposizioni si deduce, che due triangoli sono simili — 1° quando sono equiangoli; 2° quando hanno i lati omologhi proporzionali; 3° quando hanno un angolo eguale ad un angolo, compresi fra lati proporzionali; 4° quando hanno i lati rispettivamente paralleli; 5° quando hanno i lati perpendicolari ciascuno a ciascuno.

Teorema XVII.

Se dal vertice di un triangolo si abbassa sul lato opposto una perpendicolare, essa cade dentro del triangolo quando gli angoli alla base sono acuti, cade fuori quando uno di essi è ottuso, si confonderà col cateto quando uno di essi è retto.

Se dal vertice A di un triangolo ABC si abbassa sul lato opposto BC una perpendicolare, dico che essa cade nel triangolo quando gli angoli alla base B e C sono acuti, cade fuori quando uno di essi C è ottuso, si confonderà col cateto quando lo stesso angolo C è retto.

Primo. Dal vertice A, del triangolo ABC (fig. 468) si conduca la perpendicolare AD sul lato opposto BC, essa cade nell'interno del triangolo, poichè se potesse cadere fuori, per ipotesi come AM, si avrebbe nel triangolo ABM, un angolo ottuso in B ed un angolo retto in M, lo che è impossibile; dunque la perpendicolare AC cade nell'interno del triangolo ABC.

Secondo. Dal vertice A, del triangolo ottusangolo ACB, si conduca la perpendicolare AD sul lato opposto BC (fig. 469) essa cade fuori del triangolo, poichè se per ipotesi potesse cadere dentro come AO, si avrebbe parimente, che nel triangolo ACO vi sarebbe un'angolo ottuso in C ed un'angolo retto in O, lo che è impossibile, dunque la perpendicolare AD cade fuori del triangolo ottusangolo ABC.

Terzo. Se dal vertice A del triangolo rettangolo ABC (fig. 470) si conduca sul lato opposto BC una perpendicolare, questa si confonderà col cateto AB, perchè se per ipotesi cadesse dentro o fuori dello stesso triangolo, si avrebbero dallo stesso punto A abbassate due perpendicolari sul lato BC, lo che è impossibile, dunque la perpendicolare abbassata dal punto A combacia esattamente col cateto AB. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Le tre altezze di un triangolo ABC s'incontrano in uno stesso punto O (*fig. 471*). Infatti per i vertici del triangolo ABC condotte le rette MN , MI , IN rispettivamente parallele ai lati BC , AB ed AC , ne nasce il triangolo IMN . A causa delle parallele, i quadrilateri $ACBN$, $ABCM$ ed $ACIB$ sono parallelogrammi, quindi si ha $BN = AC$, $AC = BI$, $AN = BC$, $BC = AM$, $MC = AB$, $AB = CI$ dunque il punto B è medio di NI , A di NM , e C di MI , per conseguenza BD , AE , CF , cioè le tre altezze del triangolo ABC , sono le tre perpendicolari elevate sui punti medi de' lati del triangolo IMN , quindi esse s'incontrano nello stesso punto O .

Corollario. Nel triangolo ottusangolo e nel triangolo rettangolo le tre altezze non possono incontrarsi in uno stesso punto interno del triangolo perchè nel triangolo ottusangolo due sole di esse sono fuori del triangolo, cioè quelle abbassate dai vertici degli angoli acuti, e l'altra giace nell'interno; nel triangolo rettangolo le due abbassate dagli angoli acuti si confondono con i cateti e quella abbassata dall'angolo retto giace nell'interno del triangolo. Però se le tre altezze del triangolo ottusangolo si prolungano esse s'incontrano in un punto esterno; e nel triangolo rettangolo l'incontro è considerato nel vertice dell'angolo retto.

Teorema XVIII.

Le mediane di un triangolo qualunque s'incontrano in uno stesso punto.

Le mediane AD , BE , CF del triangolo ABC , dico che s'incontrano in uno stesso punto O (*fig. 472*).

Si tiri la retta EF ; essendo AE eguale ad EC ed AF eguale ad FB , la retta EF divide i lati AB ed AC del triangolo ABC in parti proporzionali, in modo che si ha $AB:AF::AC:AE$, quindi EF è parallela a BC . Ora i due triangoli OFE ed OBC , perchè equiangoli, sono simili e danno la proporzione $FE:BC::EO:OB::FO:OC$.

Parimente, tirata la retta DE , si ha la proporzione $CA:CE::CB:CD$; quindi DE è parallela ad AB , ed es-

sendo i due triangoli OED ed OBA parimente simili, danno la proporzione $DE:AB::DO:OA::EO:OB$.

Ma, per essere DE parallela ad AB, ed EF parallela a BC, la figura FEDB è un parallelogrammo, quindi EF è metà di BC e DE è metà di AB; dunque DO è la metà di AO ovvero il terzo di AD ed EO è la metà di OB ovvero il terzo di EB, per conseguenza le due mediane AD e BE si tagliano reciprocamente a due terzi della loro lunghezza. Similmente, per la stessa causa, FO è la metà di OC, ovvero il terzo di FC, ne viene pertanto che la mediana FC si taglia con le altre anche a due terzi della sua lunghezza, dunque le tre mediane del triangolo ABC debbono forzosamente incontrarsi nello stesso punto O. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XIX.

Le rette che uniscono i punti medi de' lati consecutivi di un quadrilatero qualunque formano un parallelogrammo.

Le rette EF, FG, GH, HE che uniscono i punti medi de' lati consecutivi del quadrilatero ABCD dico che formano il parallelogrammo EFGH (*fig. 173*).

Infatti si tiri la diagonale AC. Essendo AE eguale ad EB e CF eguale ad FB, la retta EF divide i lati del triangolo BCA in parti proporzionali ed è parallela alla diagonale AC; per la stessa ragione HG divide i lati del triangolo DCA in parti proporzionali ed è parallela alla diagonale AC, dunque EF è parallela ad HG.

Similmente, tirata la diagonale DB, si ha che la retta EH è parallela alla retta GF.

Inoltre, siccome le rette EH e GF sono parallele, comprese fra due rette benanche parallele, sono eguali fra loro; per la medesima causa EF è eguale ad HG; dunque il quadrilatero EFGH avendo i lati opposti eguali e paralleli è un parallelogrammo. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Le rette EG ed HF che uniscono i punti di mezzo de' lati non consecutivi di un quadrilatero qualunque si tagliano scambievolmente per metà, perchè esse sono le diagonali del parallelogrammo formato per mezzo delle rette che uniscono i punti medi dei lati consecutivi del quadrilatero medesimo.

Teorema XX.

In ogni quadrilatero iscritto il prodotto delle due diagonali è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.

Sia il quadrilatero ABCD iscritto, dico che il prodotto delle due diagonali BD ed AC è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti in modo che $AC \times BD = CD \times AB + BC \times AD$ (fig. 474).

Infatti si tiri la retta DO in modo che faccia l'angolo ADO eguale a BDC, i due triangoli DAO e DBC sono simili, perchè hanno l'angolo ADO eguale all'angolo BDC per costruzione, l'angolo DAO eguale a DBC per essere iscritti nello stesso segmento di cerchio, e per conseguenza il rimanente angolo DOA è eguale all'angolo DCB, sicchè si ha $AD:DB::AO:BC$ ovvero $AD \times BC = DB \times AO$.

Similmente i due triangoli CDO ed ABD, sono simili perchè l'angolo ADB è eguale ad ODC per costruzione, l'angolo DBA è eguale a DCO per essere iscritti nello stesso segmento di cerchio, quindi l'altro angolo BAD è eguale a COD, sicchè si avrà $AB:OC::BD:DC$ ovvero $AB \times DC = OC \times BD$. Sommando questa eguaglianza con l'altra si avrà $AD \times BC + AB \times DC = DB \times AO + OC \times BD$ ovvero $DB \times (AO + OC) = AD \times BC + AB \times DC$.

Dunque resta dimostrato, che in ogni quadrilatero iscritto il prodotto delle due diagonali è eguale alla somma dei prodotti dei lati opposti.

Scolio. Se DF fosse stata la bisettrice dell'angolo ADC, paragonati in tal caso, il triangolo ADF con DBC e CDF con ABD, avrebbe avuto luogo la stessa dimostrazione, risultando parimente $DB \times (AF + FC) = AD \times BC + AB \times DC$.

Teorema XXI.

La bisettrice di un angolo di un triangolo divide il lato opposto in due segmenti proporzionali agli altri due lati, e la bisettrice del supplemento dello stesso angolo determina ancora sul lato opposto prolungato due segmenti proporzionali agli altri due lati.

1° La bisettrice AD dell'angolo A del triangolo ABC (*fig. 175*) dico che divide il lato opposto BC in due segmenti CD e DB proporzionali ai due lati AB ed AC; in modo che si ha $CD:DB::CA:AB$ —2° La bisettrice AE del supplemento dell'angolo A, dico che determina sul lato opposto BC prolungato due segmenti CE e BE proporzionali ai medesimi lati AB ed AC; in modo che si ha $CE:BE::CA:AB$.

Primo. Si conduca dal punto B la retta BF, parallela alla bisettrice AD, fino all'incontro del lato CA prolungato. Nel triangolo CBF essendo AD parallela a BF si avrà la proporzione $CD:DB::CA:AF$. Or per essere il triangolo ABF isoscele, perchè in virtù delle parallele AD e BF gli angoli alterni-interni ABF e BAD sono eguali, per la stessa ragione sono eguali gli angoli corrispondenti AFB e CAD, ma BAD è eguale a DAC dunque ABF è eguale ad AFB, per conseguenza $AB=AF$, e sostituendo nella precedente proporzione ad AF la sua eguale AB si avrà $CD:DB::CA:AB$.

Secondo. Si conduca BG parallela alla bisettrice AE dell'angolo BAF, essendo nel triangolo CAE, la retta BG parallela ad AE si avrà la proporzione $CE:BE::CA:AG$. Per quanto precedentemente si è detto il triangolo ABG è isoscele e quindi AG è eguale ad AB, e sostituendo nella precedente proporzione ad AG la sua eguale AB, si otterrà $CE:BE::CA:AB$. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXII.

Quante rette si vogliono condotte dal vertice di un triangolo alla base, intercettano su questa e sulla sua parallela segmenti proporzionali.

Siano le rette AF, AG, AH, AI condotte dal vertice A del triangolo ABC alla base, dico che intercettano con questa e con la sua parallela DE segmenti proporzionali (*fig. 476*).

Infatti, siccome DL è parallela a BF , il triangolo ADL è equiangolo al triangolo ABF , e si ha la proporzione $DL:BF::AF:AL$; parimente il triangolo AML è equiangolo al triangolo AGF e si ha la proporzione $LM:FG::AF:AL$; ora a causa del rapporto comune $AF:AL$ si ottiene la proporzione $DL:BF::LM:FG$. Nello stesso modo si vede che $LM:FG::MN:GH$, e così di seguito: dunque le rette AF, AG, AH, AI , determinano segmenti proporzionali sulla base BC e sulla sua parallela DE . Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Se per ipotesi le medesime rette AF, AG, AH, AI , avessero diviso in parti eguali la base BC , anche la retta DE sarebbe stata divisa in parti eguali.

Teorema XXIII.

Se dal vertice dell'angolo retto di un triangolo rettangolo si abbassa sull'ipotenusa una perpendicolare: 1° Il triangolo rettangolo rimarrà diviso in due triangoli ad esso simili e quindi simili fra loro — 2° Ciascun cateto sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa ed il segmento adiacente — 3° La perpendicolare sarà media proporzionale fra i due segmenti da essa determinati.

Se dal vertice dell'angolo retto A del triangolo rettangolo CAB si conduca sull'ipotenusa BC la perpendico-

lare BD, dico 1° che il triangolo rettangolo CAB rimarrà diviso in due triangoli ADB ed ADC ad esso simili e quindi simili fra loro — 2° Che ciascun cateto sarà medio proporzionale fra l'ipotenusa BC ed il segmento adiacente — 3° Che la perpendicolare AD sarà media proporzionale fra i due segmenti BD e DC da essa determinati sull'ipotenusa BC (*fig. 477*).

Primo. Il triangolo CAB ed il triangolo ADB perchè hanno l'angolo B di comune e l'angolo CAB eguale a BDA perchè retti, il terzo angolo BAD è eguale all'altro ACB e quindi sono equiangoli, e perciò simili. Similmente si dimostra che il triangolo CAB è simile al triangolo ADC; dunque anche i due triangoli ADB ed ADC sono simili.

Secondo. Per essere simili i due triangoli CAB ed ABD i lati omologhi sono proporzionali, e si ha $BD : AB :: AB : BC$ perchè l'ipotenusa AB del piccolo triangolo è omologa a BC del grande triangolo, ed il cateto BD del primo è omologo al cateto AB del secondo, ora nello stesso modo potendosi avere $DC : AC :: AC : BC$ si conchiude che qualunque dei due cateti AB od AC è medio proporzionale fra l'ipotenusa BC ed il segmento adiacente BD o DC.

Terzo. Per essere simili i due triangoli ADB e CAD i lati omologhi sono proporzionali ma però essi hanno il lato AD di comune dunque $BD : AD :: AD : DC$, per conseguenza la perpendicolare AD è media proporzionale fra i due segmenti BD e DC da essa determinati sull'ipotenusa BC. Che è quanto si voleva dimostrare.

Teorema XXIV.

Qualunque trasversale determina sui lati di un triangolo sei segmenti in modo che il prodotto di tre di essi non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre.

Sia la trasversale DE dico che determina sui lati del triangolo ABC sei segmenti tali che il prodotto di tre

di essi non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre (*fig. 478*).

Possono darsi due casi: 1° o la trasversale incontra due lati del triangolo e il prolungamento del terzo — 2° o incontra i prolungamenti di tutti i tre lati.

Primo. Si tiri BE, e dal punto M ove questa retta incontra il lato del triangolo si conduca MN parallela ad AB prolungata in D. I due triangoli equiangoli EBD ed EMN danno la proporzione $EB:EM::BD:MN$. Parimente i due triangoli equiangoli CAD e CMN danno la proporzione $AD:MN::AC:MC$; moltiplicando queste due proporzioni termine a termine, si avrà $EB \times AD:EM \times MN::BD \times AC:MN \times MC$. Dunque $EB \times AD \times MC = EM \times BD \times AC$ ovvero il prodotto di tre segmenti non consecutivi EB, AD, MC eguale a quello degli altri tre parimente non consecutivi EM, BD, AC.

Secondo. La trasversale DE (*fig. 479*) incontra i lati del triangolo ABC prolungati, quindi tirata la retta CN parallela ad AD, si avrà a causa dei due triangoli equiangoli EBD ed ECN la proporzione $EB:EC::BD:CN$. Similmente a causa dei due triangoli equiangoli MAD ed MCN si avrà la proporzione $AD:CN::AM:CM$; moltiplicando queste due proporzioni termine e termine si otterrà $EB \times AD:EC \times CN::BD \times AM:CN \times CM$ ovvero $EB \times AD \times CM = EC \times BD \times AM$. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se la trasversale MN (*fig. 480*) taglia i lati AB ed AC del triangolo ABC, ed incontra il prolungamento del terzo lato AC, determina anche sei segmenti tali che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre. Infatti, condotta AG parallela ad MN, i triangoli simili COF e CAG danno la proporzione $CO:AO::CF:GF$, quindi $CO \times GF = AO \times CF$. Parimente i triangoli simili ABG ed EBF danno la proporzione $AE:EB::GF:FB$, ovvero $AE \times FB = EB \times GF$ moltiplicando tra loro queste due eguaglianze ed omettendo il termine GF perchè moltiplicatore comune de' due membri si ottiene l'eguaglianza $CO \times AE \times FB = AO \times CF \times EB$.

Teorema XXV.

Se tre punti determinano sui lati di un triangolo sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre, essi stanno in linea retta.

Se i tre punti D, M, E , determinano sui lati di un triangolo ABC sei segmenti tali, che il prodotto di tre di essi non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre, in modo che si ha $EB \times AD \times CM = EC \times BD \times AM$, dico che essi sono in linea retta (*fig. 479*).

Infatti, se per ipotesi la retta che passa per i punti E, M , non passasse pel punto D , ma invece pel punto O , si avrebbe $EB \times AO \times CM = EC \times BO \times AM$; dividendo membro a membro questa eguaglianza per l'altra sopra detta, si otterrà $\frac{AO}{AD} = \frac{BO}{BD}$ ovvero $AO:AD::BO:BD$; ma per reggere questa proporzione, dovrebbe essere la retta EMD parallela alla retta EMO , lo che è impossibile, dunque è parimente impossibile che il punto D non stia in linea retta con gli altri due M ed E . Resta perciò dimostrato; che tre punti sono in linea retta se determinano sui lati di un triangolo sei segmenti tali, che il prodotto di tre di essi non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre.

Teorema XXVI.

Se tre rette condotte dai vertici di un triangolo concorrono in uno stesso punto interno, del triangolo medesimo, determinano su' lati sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre.

Se tre rette AD, BF, CE , condotte dai vertici del triangolo ABC , concorrono in uno stesso punto O interno del triangolo medesimo, dico che determinano sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre, in modo che si avrà $AF \times CD \times EB = BD \times CF \times AE$ (*fig. 481*).

La trasversale AD, divide il triangolo ABC in due triangoli ACD ed ABD. Si tiri la retta DM parallela ad AC, considerando il triangolo ACD e la trasversale BF, a causa della simiglianza de' triangoli BCF e BDM si avrà la proporzione $BC:BD::CF:DM$ e per la simiglianza de' triangoli AOF e DOM si avrà la proporzione $AF:DM::AO:OD$ e moltiplicando termine a termine queste due proporzioni si otterrà $BC \times AF:BD \times DM::CF \times AO:DM \times OD$ ovvero $BC \times AF \times OD = BD \times CF \times AO$.

Parimente, si tiri DN parallela ad AB e considerando il triangolo ABD e la trasversale CE, a causa della simiglianza de' triangoli ECB e CND si avrà la proporzione $CD:CB::ND:EB$ e per la simiglianza de' triangoli AOE e DON si avrà la proporzione $ND:AE::OD:AO$ e moltiplicando termine a termine queste due proporzioni si avrà $CD \times CN:CB \times AE::ND \times OD:EB \times AO$ ovvero $CD \times EB \times AO = CB \times AE \times OD$. Moltiplicando membro a membro le due eguaglianze

$$\begin{aligned} BC \times AF \times OD &= BD \times CF \times AO \\ CD \times EB \times AO &= CB \times AE \times OD \end{aligned}$$

e riducendo si otterrà

$$AF \times CD \times EB = BD \times CF \times AE$$

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Lo stesso avviene, se le tre rette tirate dai vertici del triangolo concorrono in uno stesso punto esterno del triangolo medesimo. Infatti la trasversale AD divide il triangolo ABC (*fig. 182*) in due triangoli ADC ed ADB; tirate le rette DN e DM, la prima parallela ad AF e la seconda ad AE; per quello che precedentemente si è dimostrato, il triangolo e la trasversale CF danno l'eguaglianza $AF \times BC \times DO = BF \times CD \times AO$; similmente il triangolo ACD e la trasversale BE danno l'eguaglianza $AO \times BD \times CE = DO \times BC \times AE$, moltiplicando queste due eguaglianze membro a membro e riducendo si ottiene $AF \times BD \times CE = BF \times CD \times AE$.

teorema XXVII.

Le bisettrici degli angoli di un triangolo che s'incontrano in uno stesso punto, determinano sui lati opposti sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre.

Le tre bisettrici BI, ED, AC , degli angoli del triangolo BAE che s'incontrano in uno stesso punto F , dico che determinano sui lati opposti sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre (*fig. 183*).

Infatti: la bisettrice BI determina sul lato opposto AE due segmenti proporzionali ai lati AB ed AE quindi si ha la proporzione $EI:IA::BE:BA$. Similmente la bisettrice ED determina sul lato opposto AB due segmenti proporzionali ai lati BE ed AE e si ha la proporzione $AD:DB::AE:BE$. In ultimo la bisettrice AC determina anche sul lato opposto EB due segmenti proporzionali ai lati BA ed AE e dà la proporzione $BC:CE::BA:AE$. Moltiplicando queste tre proporzioni termine a termine si avrà: $EI \times AD \times BC: IA \times DB \times CE:: BE \times AE \times BA: BA \times BE \times AE$ ovvero $EI \times AD \times BC = IA \times DB \times CE$. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se le tre rette BI, ED ed AC , sono le mediane del triangolo ABC (*fig. 184*) tirate le rette CD, CI, ID , a causa dell'eguaglianza dei due triangoli CEI e DIA si ha $EI:IA::CI:DA$, similmente per l'eguaglianza dei due triangoli BDC e CIE si ha $BC:CE::CD:EI$; infine per l'eguaglianza dei due triangoli BDC e DIA si ha $AD:DB::ID:CB$; moltiplicando queste tre proporzioni termine a termine si avrà $EI \times BC \times AD: IA \times CE \times DB:: CI \times CD \times ID: DA \times EI \times CB$; osservando che CI è eguale a DA , CD ad EI ed ID a CB si otterrà $EI \times BC \times AD = IA \times CE \times DB$, dunque le tre mediane di un triangolo determinano sui lati opposti sei segmenti tali che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre.

Teorema XXVIII.

Se tre punti determinano sui lati di un triangolo sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre, le rette che uniscono questi tre punti con i vertici opposti degli angoli del triangolo concorrono nello stesso punto.

Se i tre punti C, I, D, determinano sui lati del triangolo BAE sei segmenti tali, che il prodotto di tre non consecutivi è eguale al prodotto degli altri tre, in modo che si ha $EI \times AD \times BC = IA \times DB \times CE$, dico che le rette BI, ED, AC che uniscono questi tre punti con i vertici opposti degli angoli del triangolo concorrono nello stesso punto F (fig. 483).

Infatti, se per ipotesi F non fosse il punto d'incontro delle tre trasversali BI, AC ed ED, e la trasversale BI incontrasse il lato opposto AE nel punto H invece dell'eguaglianza $EI \times AD \times BC = IA \times DB \times CE$, si avrebbe l'altra $EH \times AD \times BC = HA \times DB \times CE$. Dividendo queste due eguaglianze membro a membro si ottiene $\frac{EI}{EH} = \frac{IA}{HA}$

ovvero $EI : EH :: IA : HA$ proporzione falsa perchè la parte maggiore sta alla parte minore, come la minore sta alla maggiore lo che è impossibile; dunque è parimente impossibile che la trasversale BI che passa anche pel punto F possa incontrare sul lato EA un punto differente di I. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXIX.

Due poligoni sono simili allorquando sono composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.

Siano i due poligoni ABCDE, FGHIL, dico che sono simili, se sono composti da uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti (fig. 485).

Infatti i triangoli ABC , ACD ed ADE che compongono il poligono $ABCDE$, essendo simili rispettivamente ai triangoli FGH , FHI ed FIL che compongono il poligono $FGHIL$ si avrà che l'angolo ABC è eguale all'angolo FGH , $BCA = GHF$, $ACD = FHI$ e così di seguito, dunque si avrà la serie di rapporti eguali $AB:FG::BC:GH::AC:FH::CD:HI::AD:IF::DE:IL::EA:LF$, e per conseguenza i due poligoni $ABCDE$ ed $FGHIL$ avendo i loro lati omologhi proporzionali sono simili. Resta dimostrato che due poligoni sono simili, allorquando sono composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti.

Teorema XXX.

Reciprocamente due poligoni simili si possono decomporre nello stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti.

Siano i due poligoni simili $ABCDE$ ed $FGHIL$, dico che si possono decomporre nello stesso numero di triangoli simili ciascuno a ciascuno e similmente disposti (*fig. 185*).

Dal vertice dell'angolo A del poligono $ABCDE$ si conducano le due diagonali AC , AD ; similmente dal vertice dell'angolo F del poligono $FGHIL$ si conducano le due diagonali FH , FI . Or poichè i due poligoni sono simili, l'angolo ABC è eguale al suo omologo FGH , ed $AB:FG::BC:GH$ quindi due triangoli BAC e GFH avendo un angolo eguale ad un angolo compresi fra lati proporzionali sono simili; parimente si dimostra come il triangolo CAD è simile all'altro HFI , ed il triangolo DAE è simile ad IFL . Dunque, in qualsivoglia numero di triangoli possono essere decomposti due poligoni simili, questi triangoli saranno sempre simili ciascuno a ciascuno e per conseguenza saranno similmente disposti. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — Due poligoni sono simili se eccettuati tre angoli consecutivi, gli altri angoli sono rispettivamente eguali ed i lati proporzionali.

Corollario 2° — Due poligoni sono simili se eccettuato un lato e due angoli adiacenti i loro lati sono proporzionali e gli altri angoli sono rispettivamente eguali.

Corollario 3° — Due poligoni sono simili se eccettuati due lati e l'angolo che essi comprendono, gli altri lati sono proporzionali e gli altri angoli rispettivamente eguali.

Teorema XXXI.

I poligoni regolari di un medesimo numero di lati sono simili

Siano i due esagoni regolari $ABCDEF$ ed $abcdef$, dico che sono simili (*fig. 186*).

Infatti, il valore di un angolo di questi poligoni dipende dal numero dei lati, giacchè in un poligono regolare di tre lati un angolo è eguale a $\frac{2}{3}$ di un retto, in quello di quattro lati regolare è eguale a $\frac{3}{4}$ di un retto cioè all'intero retto, in quello di un pentagono regolare è eguale a $\frac{4}{5}$ di un retto, ed in quello di un esagono regolare è eguale ad $\frac{5}{6}$ di un retto, ecc. Or l'angolo A sarebbe la sesta parte della somma di otto angoli retti perchè la somma degli angoli interni dell'esagono è eguale ad otto retti, quindi essendo a , anche la sesta parte della somma di otto angoli retti, sarà dunque l'angolo A eguale all'angolo a ; lo stesso è per tutti gli altri angoli. Ma dall'altra parte i lati sono proporzionali perchè eguali fra loro in ciascun poligono, dunque i poligoni $ABCDEF$ ed $abcdef$ essendo equiangoli ed avendo i lati proporzionali sono simili.

Scolio. Qualunque sia il numero dei lati di un poligono regolare un'angolo si determina per mezzo del numero dei stessi lati, giacchè è eguale a ciascuno degli altri angoli, per essere il poligono equiangolo.

LIBRO QUARTO

RELAZIONI TRA I LATI DI UN POLIGONO, MISURA DELLA
CIRCONFERENZA, AREA DEL CERCHIO

Teorema I.

Se una retta è divisa in due parti, il quadrato fatto sulla intera retta, conterrà: il quadrato fatto sulle due parti più due volte il rettangolo che avrà per base una parte e per altezza l'altra parte.

Sia la retta AB, divisa in due parti AC e CB, dico che il quadrato fatto sulla intera retta, conterrà il quadrato fatto su di AC, più il quadrato su di CB, più due volte il rettangolo che avrà per base AC e per altezza CB (*fig. 487*) in modo che si avrà:

$$AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB.$$

Si faccia il quadrato ABDE, si prenda su di AE una porzione AF eguale ad AC, si tiri la retta FH parallela ad AB e dal punto C s'innalzi la perpendicolare CI: lo intero quadrato ABDE rimarrà diviso, in tal modo, in quattro parti, cioè in ACLF, LHDI, LCBH ed EILF, ora essendo FL eguale e parallela ad AC ed anche eguale ad AF, ACLF è il quadrato fatto sopra di AC. Parimente siccome AB è eguale ad AE ed AC è eguale ad AF si ha EF eguale a CB, ed a causa delle parallele, si ha ancora LH eguale a CB ed eguale ad IL; dunque LHDI, è il quadrato fatto sopra CB. In ultimo i due quadrati ACLF ed LHDI sottratti dall'intero quadrato ABDE danno per resta i due rettangoli LCBH ed EILF; ma LC ed LF sono eguali ad AC, ed LH e IL sono eguali a CB, dunque questi due rettangoli avranno per misura $AC \times CB$. Resta perciò dimostrato, che $AB^2 = AC^2 + CB^2 + 2AC \times CB$.

Teorema II.

Se una retta è la differenza di due rette, il quadrato fatto su di essa sarà eguale ai quadrati fatti sulle due rette, meno due volte il rettangolo che avrà per base una di queste due rette e per altezza l'altra.

Se la retta AC, è differenza delle due rette AB e CB, dico che il quadrato fatto su di essa, è eguale ai quadrati fatti sulle altre, meno due volte il rettangolo che avrà per base AB e per altezza CB (*fig. 188*), in modo che si avrà: $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC$.

Si costruisca sopra di AB il quadrato ABMI, si prenda una parte AD sopra di AI eguale ad AC e si conduca DF parallela ad AB; dal punto C si tiri CL parallela ad AI; si costruisca inoltre sulla retta ID il quadrato IDGH.

Essendo ID eguale a BC, il quadrato IDGH è eguale al quadrato EFML, quindi i due rettangoli BCLM ed ELGH hanno per misura $AB \times BC$, ma se questi due rettangoli si sottraggono dall'intera figura ABMHGD rimarrà il quadrato ACED, or l'intera figura ABMHGD contiene il quadrato di AB più il quadrato di BC dunque AC^2 ovvero $(AB - BC)^2 = AB^2 + BC^2 - 2 AB \times BC$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema III.

Il rettangolo fatto dalla somma e dalla differenza di due rette, è eguale alla differenza dei quadrati delle stesse rette.

Il rettangolo fatto dalla somma delle due rette AB e CB, e dalla differenza delle stesse rette, dico che è eguale alla differenza dei quadrati delle stesse rette (*fig. 189*), di modo che si avrà:

$$(AB + CB) \times (AB - CB) = AB^2 - BC^2.$$

Costruito il quadrato $ABGH$, si prolunghi AB di una porzione BM eguale a BC ; la retta AM è eguale ad $AB + CB$. Si completi il rettangolo $AMID$; a causa delle parallele DI ed AM , la retta IM è eguale ad EC ; dunque IM è la differenza delle due rette AB e CB , ed il rettangolo $AMID$ è eguale ad $(AB + CB) \times (AB - CB)$ perchè ha per base la somma delle due rette AB e CB e per altezza IM che come si è detto è la differenza delle stesse rette. Ma il rettangolo $AMID$ è composto dalle due parti $ABFD$ e $BMIF$ e siccome $DELH$ è eguale a $BMIF$ perchè BM è eguale ad EL e BF a DE , sarà dunque lo stesso rettangolo $AMID$ eguale al quadrato $ABGH$, fatto sulla somma delle due rette AB e CB , meno il quadrato $EFGL$ fatto sulla CB . Resta perciò dimostrato che:

$$(AB + CB) \times (AB - CB) = AB^2 - CB^2.$$

Teorema IV.

Il quadrato fatto sull'ipotenusa di un triangolo rettangolo è eguale alla somma de' quadrati fatti sopra i cateti

Sia il triangolo rettangolo DCF , dico che il quadrato fatto sull'ipotenusa DF è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i due cateti DC e CF (*fig. 490*).

Si costruisca il quadrato $DABF$ sull'ipotenusa DF , il quadrato $DCNP$ sul cateto DC ed il quadrato $CFHM$ sull'altro cateto CF . Dall'angolo retto C , si tiri la perpendicolare CG a DF e si conducano le oblique CA e PF .

L'angolo FDA essendo retto, è eguale all'angolo PDC similmente retto, aggiungendo ad entrambi lo stesso angolo CDF si avrà l'angolo CDA eguale all'angolo PDF ; quindi i due triangoli DCA e DPF avendo l'angolo CDA eguale all'angolo PDF , il lato DA eguale al lato DF perchè lati di uno stesso quadrato, il lato PD eguale al lato DC per la medesima ragione, ne risulta che il terzo lato AC è eguale al terzo lato PF ; dunque questi due triangoli sono eguali fra loro.

Essendo i due angoli adiacenti DCN e DCF eguali a due retti, FCN è linea retta, ed è per costruzione parallela a DP, quindi il triangolo PDF è equivalente alla metà del quadrato PDCN, perchè hanno la stessa base PD e la stessa altezza PN. Parimente essendo GC parallela ad AD il triangolo CDA è equivalente alla metà del rettangolo AGED, perchè ha la stessa base AD e la medesima altezza AG. Ma i due triangoli PDF e CDA sono eguali, dunque il rettangolo DAGE è equivalente al quadrato PDCN. Con lo stesso ragionamento si vede, che il rettangolo EGBF è equivalente al quadrato CFHM. Quindi l'intero quadrato DABF, fatto sull'ipotenusa del triangolo rettangolo, e formato dai due rettangoli DAGE ed EGBF, è equivalente ai due quadrati DCNP e CFHM fatti sopra i cateti. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario 1° — Il quadrato di uno dei cateti è eguale al quadrato dell'ipotenusa meno il quadrato dell'altro cateto, vale a dire $CF^2 = DABF - PDCN$, ovvero $PDCN = DABF - CF^2$, la prima eguaglianza si può scrivere ancora $CF^2 = DF^2 - CD^2$, e la seconda $CD^2 = DF^2 - CF^2$.

Se il triangolo DCF fosse stato puranche isoscele, vale a dire se avesse avuto $DC = CF$, allora DF^2 sarebbe stato eguale a due volte CF^2 , oppure a due volte DC^2 . In altri termini, in un triangolo rettangolo ed isoscele il quadrato fatto su ciascun cateto è la metà del quadrato fatto sull'ipotenusa.

Corollario 2° — Il quadrato DABF, se si divide per metà, per mezzo della diagonale AF, ne risultano due triangoli rettangoli ed isosceli, quindi $AF^2 = AB^2 + BF^2$ ovvero $AF^2 = 2 AB^2$, cioè che il quadrato fatto sulla diagonale di AF è doppio del quadrato fatto sopra il lato AB: quindi si ha la proporzione $AF^2 : AB^2 :: 2 : 1$, estraendo la radice quadrata si ha $AF : AB :: \sqrt{2} : 1$, dunque la diagonale è incommensurabile col lato dello stesso quadrato.

Teorema V.

Il quadrato fatto sul lato opposto ad un angolo acuto di un triangolo qualunque, è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati, meno il doppio rettangolo di uno di questi lati per la proiezione su di esso dell'altro lato adiacente all'angolo acuto.

Il quadrato $ABFD$, fatto sul lato opposto all'angolo acuto C del triangolo CDF , dico che è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra gli altri due lati, meno il doppio rettangolo di uno di questi lati per la proiezione su di esso dell'altro lato adiacente all'angolo acuto (*fig. 491*), di modo che si ha $DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2CF \times CL$.

Dai tre vertici del triangolo CDF si tirino sui lati opposti le perpendicolari CG , DI , FO ; i tre quadrati $ABFD$, $FHMC$ e $DCNP$ rimarranno divisi in sei rettangoli equivalenti a due a due. Infatti tirate le diagonali CA ed FP i triangoli ADC e PDF sono equivalenti perchè hanno un angolo eguale ad un angolo compresi fra lati rispettivamente eguali; ma il primo è metà del rettangolo $AGED$, perchè ha la stessa base AD e la stessa altezza AG , ed il secondo è metà del rettangolo $OPDQ$ perchè ha la stessa base PD e la medesima altezza OP , dunque i due rettangoli $AGED$ ed $OPDQ$ sono equivalenti. Nello stesso modo si dimostra come il rettangolo $EGBF$ è equivalente ad $ILFH$, ed il rettangolo $IMCL$ è equivalente all'altro $ONCQ$. Ora il rettangolo $IMCL$ è formato dal lato CF e dalla proiezione CL dell'altro lato CD sullo stesso CF , quindi rappresentando i due rettangoli equivalenti $IMCL$ ed $ONCQ$ per $2 CF \times CL$ si ha

$$DF^2 = CF^2 + CD^2 - 2 CF \times CL.$$

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema VI.

Il quadrato fatto sul lato, opposto ad un angolo ottuso, di un triangolo ottusangolo, è eguale alla somma de' quadrati degli altri due lati, più al doppio rettangolo di uno di questi lati per la proiezione su di esso dell'altro lato adiacente all'angolo ottuso.

Il quadrato ALFB fatto sul lato AB opposto all'angolo ottuso C del triangolo ottusangolo ACB, dico che è eguale alla somma dei quadrati fatti sugli altri due lati CB ed AC più al doppio rettangolo del lato AC per la proiezione DC su di esso dell'altro lato BC adiacente all'angolo ottuso (*fig. 492*) di modo che si ha

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD.$$

Infatti essendo BD perpendicolare ad AD, il triangolo rettangolo ADB dà $AB^2 = AD^2 + BD^2$ e siccome la retta AD è divisa in due parti si ha perciò AD^2 ovvero $(AC + CD)^2 = AC^2 + CD^2 + 2AC \times CD$, dunque:

$$AB^2 = AC^2 + CD^2 + BD^2 + 2AC \times CD.$$

Ora il quadrato di BC è eguale a $BD^2 + CD^2$, si ha per conseguenza sostituendo nella precedente eguaglianza a $CD^2 + BD^2$ il quadrato di BC

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2AC \times CD.$$

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. I due rettangoli, fatti sulle proiezioni scambievoli dei lati, adiacenti all'angolo ottuso, di un triangolo ottusangolo, sono equivalenti. Infatti, si completino i rettangoli BISZ ed AHMD; i quattro rettangoli BEGF, BISZ, DAHM ed EALG costruiti sui lati di uno stesso angolo e sui loro prolungamenti sono equivalenti a due a due, cioè il rettangolo BEGF è equivalente al rettangolo BISZ ed il rettangolo EALG è equivalente all'altro ADMH ma si è già

dimostrato che $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2 AC \times CD$ togliendo dunque dalla somma dei due rettangoli BISZ e DAHM il quadrato di AC e quello di BC rimarranno i due rettangoli CIST e DCNM equivalenti a $2 AC \times CD$; ma il rettangolo DCNM è rappresentato da $DC \times AC$, perchè AC è eguale a CN, quindi il rettangolo CIST è equivalente a DCNM.

Teorema VII.

In un triangolo rettangolo, il quadrato fatto sull'ipotenusa sta al quadrato di un cateto, come l'ipotenusa alla proiezione di questo cateto sulla stessa ipotenusa.

Sia il triangolo rettangolo DCF, dico che il quadrato dell'ipotenusa DF sta al quadrato del cateto CF come l'ipotenusa alla proiezione EF di questo cateto (*fig. 490*) di modo che si avrà $DF^2 : CF^2 = DF : EF$ oppure $DF^2 : DC^2 :: DF : DE$.

Infatti il quadrato DFBA ed il rettangolo EFBG avendo la stessa altezza EG stanno fra loro come le basi sicchè si ha la proporzione $DFBA : EFBG :: DF : EF$: ma il rettangolo EFBG è equivalente al quadrato MCFH, quindi, nella detta proporzione, sostituendo ad EFBG il suo equivalente MCFH si ottiene $DFBA : MCFH :: DF : EF$. Parimente, con la medesima dimostrazione si ottiene $DFBA : PDCN :: DF : DE$. Dunque resta dimostrato, che i quadrati fatti sull'ipotenusa e su di un cateto, in un triangolo rettangolo, sono proporzionali all'ipotenusa ed alla proiezione del cateto sulla medesima ipotenusa.

Corollario 1° — I quadrati fatti sui cateti, in un triangolo rettangolo sono proporzionali alle proiezioni de' medesimi cateti sulla ipotenusa. Infatti il rapporto dei due quadrati NPDC ed MCFH, è lo stesso di quello dei due rettangoli DAGE ed EGBF che hanno la stessa altezza ed ai quali sono equivalenti; dunque il rapporto dei due quadrati è eguale a quello delle proiezioni de' due cateti DE ed EF sicchè $DC^2 : CF^2 :: DE : EF$.

Corollario 2° — Se da un punto A di una circonferenza (*fig. 193*) si conducano le corde AB ed AC all'estremità del diametro BC, il triangolo ABC, essendo rettangolo in A, si avrà: 1° che la perpendicolare AE sarà media proporzionale fra i due segmenti BE ed EC del diametro e quindi $BE \times EC = AE^2$; 2° che la corda AB sarà media proporzionale fra il diametro BC ed il segmento BE, e quindi $BC \times BE = AB^2$; come ancora, per la stessa ragione, si avrà $CB \times CE = AC^2$, dunque $AB^2 : AC^2 :: BE : CE$, lo stesso rapporto dei quadrati sui cateti avuti nel corollario precedente.

Teorema VIII.

In un triangolo qualunque, la somma dei quadrati di due lati è eguale al doppio quadrato della mediana abbassata sul terzo lato, più al doppio quadrato della metà di questo terzo lato.

Sia il triangolo ABC, dico che la somma dei quadrati dei lati AB ed AC è eguale al doppio quadrato della mediana AE abbassata sul terzo lato BC più al doppio quadrato della BE metà di questo terzo lato. Sicchè si avrà $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$ (*fig. 194*).

Si abbassi la perpendicolare AD. Il triangolo AEB essendo ottuso, si avrà $AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \times ED$, perchè ED è la proiezione del lato AE sul lato BE.

Similmente il triangolo AEC essendo acuto, si avrà $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2EC \times ED$, perchè ED è la proiezione del lato AE sul lato EC.

Aggiungendo membro a membro queste due eguaglianze, si avrà $AB^2 + AC^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \times ED + AE^2 + EC^2 - 2EC \times ED$.

Siccome BE è eguale ad EC così riducendo questa eguaglianza, si avrà $AB^2 + AC^2 = 2AE^2 + 2BE^2$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema IX.

In un triangolo qualunque la differenza dei quadrati di due lati è eguale al doppio rettangolo dell'altro lato per la proiezione della sua mediana sulla medesima sua direzione.

Sia il triangolo ABC, dico che la differenza dei quadrati di due lati AB ed AC è eguale al doppio rettangolo dell'altro lato BC per la proiezione ED della sua mediana sulla medesima sua direzione. Sicchè si avrà $AB^2 - AC^2 = 2BC \times ED$ (fig. 194).

Si abbassi la perpendicolare AD sul lato BC. Il triangolo AEB essendo ottuso, si avrà $AB^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \times ED$.

Similmente essendo il triangolo AEC acuto, si avrà $AC^2 = AE^2 + EC^2 - 2EC \times ED$.

Sottraendo membro a membro queste due eguaglianze, si avrà $AB^2 - AC^2 = AE^2 + BE^2 + 2BE \times ED - AE^2 - EC^2 + 2EC \times ED$.

Siccome BE è eguale ad EC, così riducendo questa eguaglianza si avrà $AB^2 - AC^2 = 4BE \times ED$ ovvero $AB^2 - AC^2 = 2BC \times ED$. Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Il luogo geometrico dei punti, che la somma dei quadrati delle distanze da questi punti a due punti dati A e B sia costante è una circonferenza che ha per centro il punto medio della distanza dei punti dati. In fatti se la somma dei quadrati di AB ed AC è costante sarà pure costante quella dei quadrati di BE ed AE, quindi AE sarà costante. Ed il luogo geometrico dei punti, che la differenza dei quadrati delle distanze da questi punti a due punti dati A e B sia costante è una retta perpendicolare ad AB. Poichè se la differenza dei quadrati di AB ed AC è costante sarà pure costante il rettangolo di BC e DE quindi DE sarà costante.

Teorema X.

Il rettangolo di due lati di un triangolo è eguale al rettangolo formato dal diametro del cerchio circoscritto e dalla perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo, compreso fra i detti lati, sul terzo lato del triangolo.

Sia il triangolo ABC, dico che il rettangolo dei due lati AB ed AC è eguale al rettangolo dell'altezza AD e del diametro AE del cerchio circoscritto allo stesso triangolo (*fig. 195*).

Infatti, si tiri la corda BE, i due triangoli ADC ed ABE hanno gli angoli CDA ed EBA eguali perchè retti essendo AD perpendicolare a DC ed EBA iscritto in mezzo cerchio, gli angoli ACD ed AEB eguali, perchè ciascuno ha per misura la metà dell'arco AB compreso fra i loro lati, quindi il terzo angolo DAC è eguale al terzo angolo BAE, dunque i due triangoli ADC ed ABE sono simili. Dalla similitudine di questi due triangoli ne nasce che $AC:AE::AD:AB$ per conseguenza $AC \times AB = AE \times AD$. Resta perciò dimostrato, che il rettangolo di due lati di un triangolo, è eguale al rettangolo dell'altezza corrispondente al terzo lato e del diametro del cerchio circoscritto allo stesso triangolo.

Corollario 1° — Le tre altezze di un triangolo sono ordinatamente proporzionali ai rettangoli dei due lati che partono dallo stesso vertice.

Corollario 2° — Il raggio AM del cerchio circoscritto al triangolo ABC è eguale al prodotto de' tre lati diviso pel quadruplo dell'area del triangolo. Infatti moltiplicando i due membri dell'eguaglianza $AC \times AB = AE \times AD$ per BC, si avrà $AC \times AB \times BC = AE \times AD \times BC$ e siccome $AD \times BC$ rappresenta il doppio dell'area del triangolo ABC così $AM = \frac{AC \times AB \times BC}{4ABC}$

Teorema XI.

Il rettangolo di due lati di un triangolo è eguale al quadrato della bisettrice del loro angolo, aumentato del rettangolo dei due segmenti fatti dalla stessa bisettrice sul terzo lato.

Sia il triangolo ABC, dico che il rettangolo dei due lati AB ed AC è eguale al quadrato della bisettrice AD dell'angolo BAC aumentato del rettangolo dei due segmenti BD e DC fatti dalla stessa bisettrice sul terzo lato BC. Sicchè si avrà $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$. (fig. 196).

Si faccia l'angolo DCE eguale a DAB, e si prolunghi AD fino all'incontro di CE. I due triangoli ABD e CED sono equiangoli, perchè l'angolo DCE è eguale a DAB per costruzione, l'angolo CDE è eguale a BDA perchè opposti al vertice e quindi il terzo angolo ABD è eguale al terzo angolo DEC. Similmente i due triangoli ABD ed AEC sono equiangoli, perchè l'angolo EAC è eguale all'angolo BAD a causa della bisettrice AD, l'angolo AEC è eguale ad ABD come sopra si è detto, quindi il terzo angolo ACE è eguale al terzo angolo ADB.

Dall'eguaglianza degli angoli dei due triangoli ABD ed ACE si ha $AB : AD :: AD : AC$, quindi $AB \times AC = AD^2 + DE \times AD$. Or i due triangoli ABD e CED essendo equiangoli danno $BD : DE :: AD : DC$ quindi $BD \times DC = DE \times AD$. Sostituendo a $DE \times AD$ nella prima eguaglianza, la sua eguale $BD \times DC$ si avrà $AB \times AC = AD^2 + BD \times DC$.

Resta perciò dimostrato, che il rettangolo di due lati di un triangolo è eguale al quadrato della bisettrice del loro angolo, aumentato del rettangolo dei due segmenti fatti dalla stessa bisettrice sul terzo lato.

Teorema XII.

Il raggio del cerchio iscritto in un triangolo è eguale all' area dello stesso triangolo divisa pel semiperimetro, ed il raggio di un cerchio ex-isritto è eguale all' area del triangolo divisa per la differenza fra il semiperimetro ed il lato che questo cerchio tocca esternamente.

1° Sia il cerchio iscritto nel triangolo ABC, dico che il raggio OR è eguale all' area di questo triangolo divisa pel semiperimetro — 2° Sia il cerchio ex-isritto EDF dico che il raggio MD è eguale all' area del triangolo ABC divisa per la differenza fra il semiperimetro ed il lato AC che questo cerchio tocca esternamente (fig. 497).

Primo. Si tirino dal centro del cerchio iscritto ai tre vertici del triangolo le rette OC, OA, OB, questo triangolo verrà decomposto in tre triangoli che avranno per altezza comune il raggio OR si avranno le seguenti eguaglianze:

$$AOC = \frac{AC}{2} \times OR, \quad AOB = \frac{AB}{2} \times OR, \quad COB = \frac{CB}{2} \times OR$$

$$\text{ovvero } ACB = \frac{AC + AB + CB}{2} \times OR$$

$$\text{dunque } OR = \frac{ACB}{\frac{1}{2} AC + \frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CB}$$

E se si dinota con S, la superficie del triangolo ABC e con 2 P, il perimetro si deduce dall'ultima eguaglianza

$$OR = \frac{S}{P}$$

Secondo. Si tirino dal centro del cerchio ex-iscritto ai tre vertici del triangolo le rette MC, MA, MB, ciascuno de' tre triangoli MAC, MAB ed MCB avrà per base uno de' lati del triangolo ABC e per altezza comune il raggio MD, quindi si avrà:

$$MAC = \frac{AC}{2} \times MD, MAB = \frac{AB}{2} \times MD, MCB = \frac{CB}{2} \times MD;$$

e poichè $ABC = MAB + MCB - MAC$

$$\text{si avrà, } ABC = \frac{AB + CB - AC}{2} \times MD$$

$$\text{quindi, } MD = \frac{ABC}{\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CB - \frac{1}{2} AC} \quad \text{e per con-}$$

$$\text{seguenza } MD = \frac{ABC}{\frac{1}{2} AB + \frac{1}{2} CB + \frac{1}{2} AC - AC}$$

Dinotando parimente con S la superficie del triangolo ABC e con 2P il perimetro, si deduce dalla pre-

$$\text{cedente eguaglianza } MD = \frac{S}{P - CA}$$

Dunque resta dimostrato, che il raggio del cerchio iscritto in un triangolo è eguale all'area dello stesso triangolo divisa pel semiperimetro, ed il raggio di un cerchio ex-iscritto è eguale all'area del triangolo divisa per la differenza fra il semiperimetro ed il lato che questo cerchio tocca esternamente.

Corollario. L'area di un triangolo è eguale alla radice quadrata del prodotto del raggio del cerchio iscritto per tre raggi

dei tre cerchi ex-isritti. Infatti dinotando con R il raggio del cerchio iscritto e con R' , R'' , R''' i tre dei cerchi ex-isritti per quello che precedentemente si è dimostrato si avrà:

$$R = \frac{S}{P} \quad R' = \frac{S}{P - CA} \quad R'' = \frac{S}{P - BC}$$

$$R''' = \frac{S}{P - AB} \quad \text{e moltiplicando si otterrà:}$$

$$R R' R'' R''' = \frac{S^4}{P (P - CA) (P - BC) (P - AB)} = S^2$$

$$\text{dunque } S = \sqrt{R R' R'' R'''}$$

Teorema XIII.

In ogni quadrilatero che abbia i lati opposti paralleli la somma de' quadrati fatti sopra i quattro lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

Sia il parallelogrammo $ABCD$, dico che la somma de' quadrati fatti sopra i quattro lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali AC e BD (*fig. 86*).

Infatti, le due diagonali AC e BD tagliandosi scambievolmente in parti eguali, nel triangolo ADB si avrà: $AD^2 + AB^2 = 2BO^2 + 2AO^2$; similmente, nel triangolo CDB si avrà $DC^2 + CB^2 = 2DO^2 + 2OC^2$, quindi la somma dei quadrati de' quattro lati, sarà eguale a quattro volte il quadrato di BO più quattro volte il quadrato di CO ; ma $4BO^2$ è eguale a BD^2 e $4CO^2$ è eguale a CA^2 dunque $AD^2 + DC^2 + CB^2 + BA^2 = BD^2 + CA^2$. Resta perciò dimostrato che se un quadrilatero abbia i lati opposti paralleli la somma dei quadrati dei quattro lati è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali.

Teorema XIV.

In ogni quadrilatero che non abbia i lati opposti paralleli la somma de' quadrati fatti sopra i quattro lati è eguale alla somma de' quadrati delle diagonali, più quattro volte il quadrato della retta tirata nei punti medi di queste diagonali.

Sia il quadrilatero ABCD, ed F, G i punti medi delle due diagonali, dico che la somma de' quadrati fatti sopra i lati AB, BC, CD e DA è eguale alla somma dei quadrati delle diagonali AC e DB più quattro volte il quadrato della retta tirata nei punti medi F e G di queste diagonali (*fig. 498*).

Infatti essendo nel triangolo ABD, AF una mediana, si ha $AB^2 + AD^2 = 2AF^2 + 2FD^2$. Similmente nel triangolo DCB, essendo CF una mediana, si ha $CB^2 + CD^2 = 2CF^2 + 2FD^2$. Sommando queste due eguaglianze membro a membro si ottiene $AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = 2AF^2 + 2CF^2 + 4FD^2$.

Ora nel triangolo FCA, essendo FG una mediana si ottiene parimente $AF^2 + CF^2 = 2FG^2 + 2AG^2$, quindi l'eguaglianza precedente si riduce ad $AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = 4FG^2 + 4AG^2 + 4FD^2$. Ma essendo AC divisa in due parti eguali nel punto G si ha che il quadrato di AC è eguale a quattro volte il quadrato di AG, e DB essendo similmente divisa in due parti eguali nel punto F, si ha che il quadrato di DB è eguale a quattro volte il quadrato di FD; dunque sostituendo nell'ultima eguaglianza ottenuta a $4AG^2$ la sua eguale AC^2 ed a $4FD^2$ la sua eguale DB^2 si ottiene $AB^2 + AD^2 + CB^2 + CD^2 = AC^2 + DB^2 + 4FG^2$ cioè la somma dei quadrati de' quattro lati del quadrilatero ABCD eguale alla somma dei quadrati delle diagonali, più quattro volte il quadrato della retta che congiunge i punti medi delle stesse diagonali.

Teorema XV.

Le diagonali di un quadrilatero iscritto, stanno tra loro, come la somma dei prodotti de' due lati che passano per ciascuna delle due estremità della prima diagonale sta alla somma dei prodotti de' due lati che passano per ciascuna delle due estremità della seconda diagonale.

Sia il quadrilatero ABCD iscritto, dico che le due diagonali AC e BD, stanno fra loro, come la somma dei prodotti dei due lati che passano per ciascuna delle due estremità A e C della prima diagonale, sta alla somma dei prodotti dei due lati che passano per ciascuno delle due estremità B e D della seconda diagonale, in modo che si ha $AC:BD :: AB \times AD + BC \times CD : AB \times BC + AD \times DC$ (fig. 199).

Si prenda l'arco IC eguale all'arco AD e si tiri BI; i due triangoli ABD ed EBC sono simili, perchè hanno gli angoli in B eguali, i quali intercettano archi eguali, l'angolo ADB eguale ad ECB, come iscritti nello stesso segmento di cerchio, quindi i lati omologhi sono proporzionali e si ha $BD:BC::AB:BE$, ovvero $BE \times BD = AB \times BC$. Similmente i due triangoli ECI ed EAB sono simili perchè hanno gli angoli in E eguali, come opposti al vertice, l'angolo ECI eguale ad ABE come iscritti nello stesso segmento di cerchio, quindi i lati omologhi sono proporzionali, ma i due triangoli CBD ed EAB sono equiangoli, dunque CBD è equiangolo ad ECI e si ha la proporzione $BD:IC::DC:EI$, ovvero $EI \times BD = IC \times DC$; ma CI è eguale ad AD, si ha invece $EI \times BD = AD \times DC$, sommando questa eguaglianza con l'altra precedentemente trovata si ottiene $BE \times BD + EI \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Or siccome $BE \times BD + EI \times BD$ è eguale a $(BE + EI) \times BD$, che è eguale a $BI \times BD$, si ha che $BI \times BD = AB \times BC + AD \times DC$.

Inoltre, si prenda l'arco OB eguale ad AD e sitiri OC, si trova similmente $CO \times AC = AB \times AD + BC \times CD$. Siccome la corda CO è eguale alla corda BI si ottiene:

$$\frac{AC}{BD} = \frac{AB \times AD + BC \times CD}{AB \times BC + AD \times DC}$$

ovvero $AC:BD::AB \times AD + BC \times CD:AB \times BC + AD \times DC$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XVI.

Due triangoli che hanno un angolo eguale stanno tra loro come i rettangoli dei lati che formano l'angolo eguale

Siano i due triangoli ABC e DEF che hanno l'angolo BAC eguale all'angolo EDF, dico che essi stanno tra loro come $AC \times AB$ sta a $DF \times DE$ (*fig. 200*).

Infatti si porti il triangolo DEF sul triangolo ABC in modo che l'angolo D combaci esattamente sul suo eguale A, è chiaro che il lato EF prenderà la direzione di E'F'; si tiri E'C.

I due triangoli CE'A ed AF'E' avendo per vertice comune E' e le basi situate sull'istessa retta AC hanno la stessa altezza, quindi essi stanno tra loro come le basi, e si ha la proporzione $CE'A : AF'E' :: AC : AF'$. Similmente i due triangoli ABC e CE'A avendo per vertice comune C e le basi situate sull'istessa retta AB hanno la stessa altezza, quindi essi stanno tra loro anche come le basi, e si ha la proporzione $ABC : CE'A :: AB : AE'$ moltiplicando queste due proporzioni termine a termine e poichè CE'A può essere o messo, come moltiplicatore comune de' termini del primo rapporto, si ottiene $ABC : AF'E' :: AC \times AB : AF' \times AE'$; ma AF' è eguale a DF, AE' è eguale a DE, ed il triangolo AE'F' è per costruzione è eguale a DEF; quindi si ha invece, $ABC : DEF :: AC \times AB : DF \times DE$.

Resta dunque dimostrato, che due triangoli che hanno un angolo eguale stanno tra loro come i rettangoli de'lati che formano l'angolo eguale.

Corollario — Se i due triangoli sono equivalenti, i rettangoli dei lati che comprendono gli angoli eguali, sono equivalenti, ossia se questi lati sono inversamente proporzionali.

Teorema XVII.

Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati de'lati omologhi

Siano i due triangoli simili ABC e DEF, dico che essi stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, in modo che si ha $ABC:DEF::AC^2:DF^2$ (*fig. 166*).

Per essere i due triangoli ABC e DEF simili, l'angolo A è eguale all'angolo D, quindi per quello che si è dimostrato nel teorema precedente, a causa dell'eguaglianza di questi angoli si ottiene $ABC:DEF::AB \times$

$AC:DE \times DF$, ovvero $\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AC}{DF}$; ma la si-

miglianza de' due triangoli ABC e DEF, dà ancora la

proporzione $AB:DE::AC:DF$, ovvero $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$

quindi nell'eguaglianza precedente $\frac{ABC}{DEF} = \frac{AB}{DE} \times \frac{AC}{DF}$

sostituendo ad $\frac{AB}{DE}$ la sua eguale $\frac{AC}{DF}$ si ottiene

$\frac{ABC}{DEF} = \frac{AC}{DF} \times \frac{AC}{DF}$ ovvero $ABC:DEF::AC^2:DF^2$.

Dunque due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi.

Teorema XVIII.

I perimetri de' poligoni simili stanno tra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi lati

Siano i due poligono simili ABCD e DEFG, dico che i perimetri di questi poligoni stanno tra loro come i lati omologhi, e le loro superficie come i quadrati di questi lati (*fig. 204*).

Infatti: 1° per essere i due poligoni simili, si possono scomporre in egual numero di triangoli simili e similmente disposti, ma i triangoli simili hanno i lati omologhi proporzionali quindi si ha che $AB:DE::BC:EF::CD:FG::DA:GD$. Ora in una serie di rapporti eguali la somma degli antecedenti, sta alla somma dei conseguenti come ciascuno antecedente sta al proprio conseguente, dunque $AB + BC + CD + DA : DE + EF + FG + GD :: AB:DE$, ovvero il perimetro del poligono ABCD sta al perimetro del poligono DEFG come il lato AB sta al suo omologo DE.

2° Per essere i due triangoli ABC e DEF simili si ha, $ABC:DEF::AC^2:DF^2$, parimente i due triangoli ACD e DFG per essere simili danno $ACD:DFG::AC^2:DF^2$. Paragonando queste due proporzioni e visto che esse hanno il rapporto comune $AC^2:DF^2$ si ottiene $ABC:DEF::ACD:DFG$, dunque dall'eguaglianza di questi due rapporti si deduce che $ABC + ACD : DEF + DFG :: ABC:DEF$; ma si ha ancora $ABC:DEF::AB^2:DE^2$ per conseguenza $ABC + ACD : DEF + DFG :: AB^2:DE^2$, ovvero la superficie del poligono ABCD sta alla superficie del poligono DEFG come il quadrato AB sta al quadrato DE.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XIX.

Le parti di due corde che si tagliano in un cerchio sono inversamente proporzionali

Le parti delle due corde AB e CD che si tagliano nel cerchio ACBD, dico che sono inversamente proporzionali, in modo che si ha $DE:EB::AE:EC$ (*fig. 202*).

Si tirino le due corde AD e CB; i due triangoli EAD ed ECB sono simili, perchè hanno gli angoli in E eguali come opposti al vertice, l'angolo ADE eguale ad EBC perchè iscritti nello stesso segmento di cerchio, per la stessa causa l'angolo DAE è eguale ad ECB. Ma due triangoli equiangoli hanno i lati omologhi proporzionali, quindi $DE:EB::AE:EC$; per conseguenza, resta dimostrato che le parti di due corde che si tagliano in un cerchio sono inversamente proporzionali.

Corollario. Dalla sopradetta proporzione si deduce, che il rettangolo delle due parti di una corda è eguale al rettangolo delle due parti dell'altra, dappoichè $DE \times EC = EB \times AE$.

Teorema XX.

Se da un punto preso fuori di un cerchio si menano due seganti, terminate all'arco concavo fra i loro piedi, esse saranno inversamente proporzionali alle parti esterne dello stesso cerchio.

Se dal punto E fuori del cerchio ABCD si menano due seganti ED ed EC terminate all'arco concavo DOC fra i loro piedi, dico che esse saranno inversamente proporzionali alle parti esterne AE ed EB, in modo che si avrà $ED:EC::EB:EA$ (*fig. 203*).

Si tirino le corde AC e DB; i due triangoli EDB ed ECA sono simili, perchè hanno l'angolo E di comune

e l'angolo EDB eguale ad ACB perchè iscritti nello stesso segmento, per conseguenza questi due triangoli hanno i lati omologhi proporzionali, quindi $ED:EC::EB:EA$. Resta dunque dimostrato che le due seganti ED ed EC sono inversamente proporzionali alle parti AE ed EB esterne del cerchio.

Corollario. Dalla medesima proporzione $ED:EC::EB:EA$ si deduce, che il rettangolo fatto da una segante e dalla sua parte esterna, è eguale al rettangolo fatto dell'altra segante e dalla sua parte esterna, dappoichè $ED \times EA = EC \times EB$.

Teorema XXI.

Se da un punto preso fuori di un cerchio si conducono una tangente ed una segante, la tangente sarà media proporzionale fra l'intera segante e la parte esterna.

Se dal punto A preso fuori del cerchio BDCF si conducano una tangente AF ed una segante AD, dico che la tangente sarà media proporzionale fra l'intera segante e la parte esterna, in modo che si avrà $AD:AF::AF:AB$ (*fig. 204*).

Si tirino le rette BF e DF, i due triangoli AFB ed AFD, hanno l'angolo di comune A, l'angolo AFB formato dalla tangente AF e dalla corda FB eguale all'angolo FDB, perchè hanno entrambi per misura la metà dell'arco FOB quindi il terzo angolo ABF è eguale al terzo angolo AFD ed i due triangoli sono simili, per conseguenza $AD:AF::AF:AB$.

Corollario. Il quadrato della tangente è eguale al rettangolo fatto dall'intera segante e dalla parte esterna, poichè dalla proporzione $AD:AF::AF:AB$ si ricava $AF^2 = AD \times AB$.

Scolio. Le reciproche delle tre precedenti proporzioni sono vere. Per quest'ultima non può esservi alcuna difficoltà perchè per tre punti dati non linea retta passa sempre una circonferenza. Per le altre due poi, la dimostrazione è la stessa, giacchè se

si hanno due rette ED ed EC (*fig. 205*) che si tagliano in E e su di esse esistono quattro punti A, B, C, D, in modo che $ED:EC::EA:EB$, per questi quattro punti passa una circonferenza. Or se ciò si nega, e la circonferenza passando per i punti C, A, D, incontrasse la retta EC in F si avrebbe $ED:EC::EA:EF$, ma si è detto che $ED:EC::EA:EB$, quindi si avrebbe $EB=EF$ cioè la parte eguale al tutto lo che è impossibile.

Teorema XXII.

I perimetri de' poligoni regolari di uno stesso numero di lati, stanno tra loro come i raggi dei cerchi circoscritti, o come quelli de' cerchi iscritti, e le superficie come i quadrati dei medesimi raggi.

Siano AB ed *ab* due lati di due poligoni regolari di cui si tratta, O ed *o* i loro centri, OD ed *od* le loro apoteme, dico che i perimetri di questi poligoni stanno tra loro come i raggi OA ed *oa* dei cerchi circoscritti o come OD ed *od* dei cerchi iscritti e le superficie come i quadrati dei stessi raggi (*fig. 206*).

Primo. I perimetri dei due poligoni stanno tra loro come i lati omologhi AB ed *ab*, ed a causa dell'eguaglianza degli angoli OBA ed *oba*, essendo ciascuno metà dell'angolo del poligono, e dell'eguaglianza degli altri OAB ed *oab*, per la stessa ragione, avviene che i due triangoli ABO ed *abo* sono simili e sono ancor simili i due triangoli rettangoli ADO ed *ado* quindi $AB:ab::AO:ao::DO:do$ dunque i perimetri dei due poligoni regolari stanno tra loro come i raggi AO ed *ao* dei cerchi circoscritti o come i raggi DO ed *do* dei cerchi iscritti.

Secondo. Le superficie dei medesimi poligoni stanno tra loro come i quadrati dei lati omologhi AB ed *ab*, quindi per quello che finora si è dimostrato essi stanno tra loro come $AO^2:ao^2$ o come $OD^2:od^2$ vale a dire come i quadrati de' raggi dei cerchi circoscritti o come i quadrati de' raggi dei cerchi iscritti.

Teorema XXIII.

In un cerchio dato si può sempre iscrivere e circoscrivere due poligoni regolari simili, tali che la differenza de' perimetri, oppure delle loro superficie siano minori di una data quantità omogenea.

In un cerchio dato AEBH dico che si può sempre iscrivere e circoscrivere due poligoni regolari simili, tali che la differenza dei perimetri oppure delle loro superficie siano minori della data quantità omogenea X (fig. 207).

Primo. Iscritto un poligono e circoscritto un'altro, simili, ed ambidue regolari e intendendosi raddoppiato indefinitamente il numero de' lati di essi, si giungerà a trovare una differenza fra i loro perimetri minore della data quantità. Infatti dinotando col nome dei due lati CD ed AB i perimetri dei due poligoni regolari simili l'uno iscritto e l'altro circoscritto si ha $CD:AB::FE:FG$ dalla quale si ha $CD-AB:CD::FE-FG:FE$
 $CD \times FE - FG$

ovvero $CD - AB = \frac{FE}{CD \times FE - FG}$ ma in questo secon-

do

membro il perimetro CD va sempre diminuendo rimanendo sempre eguale l'apotema FE, ed il numeratore $FE - FG$ è minore della metà del lato del poligono iscritto AB, perchè $FE - FG = FA - FG$, or siccome il lato di questo poligono diminuisce indefinitamente a causa che l'arco da esso sotteso va indefinitamente crescendo, così $FE - FG$ diminuirà indefinitamente; dunque diminuirà indefinitamente ancora $CD - AB$ e per conseguenza si arriverà sempre ad una differenza fra i perimetri dei due anzidetti poligoni minore di una quantità data omogenea.

Secondo. Dinotando ancora con CD ed AB le superficie de' due poligoni regolari simili l'uno iscritto e l'al-

tro circoscritto si avrà $CD:AB::FE^2:FG^2$ dalla quale si ha $CD-AB:CD::FE^2-FG^2:FE^2$;

ovvero $CD-AB = \frac{CD \times FE^2 - FG^2}{FE^2}$ ed osservando

parimente che in questo secondo membro la superficie CD va sempre diminuendo, ed il denominatore FE^2 è sempre lo stesso, ed il numeratore FE^2-FG^2 ovvero FA^2-FG^2 essendo eguale ad AG^2 , per le sopradette ragioni, diminuendo questo numeratore diminuirà ancora la differenza fra le due superficie CD ed AB , dunque si potrà giungere ad una differenza fra queste due superficie minore di una data quantità omogenea.

Corollario. Essendo la circonferenza $AEBH$ compresa fra i perimetri dei due poligoni regolari CD ed AB , l'uno iscritto e l'altro circoscritto, può la differenza fra la detta circonferenza ed uno dei perimetri dei medesimi poligoni essere minore di una data quantità: lo stesso è per la differenza fra il cerchio ed una delle superficie degli stessi poligoni; dunque, la circonferenza è il limite dei poligoni regolari iscritti e circoscritti, ed il cerchio è il limite della loro superficie.

Teorema XXIV.

Le circonferenze de' cerchi stanno fra loro come i rispettivi raggi, e le superficie de' medesimi cerchi stanno fra loro come i quadrati de' stessi raggi.

Siano le due circonferenze ABC e DEF dico che esse stanno fra loro come i rispettivi raggi OB ed $O'E$ e le superficie de' medesimi cerchi come i quadrati degli stessi raggi (*fig. 208*).

Primo. S'iscrivano in queste due circonferenze due poligoni regolari simili, si ha $ABC:DEF::OB:O'E$, permutando si ottiene $ABC:OB::DEF:O'E$, quindi

$\frac{ABC}{OB} = \frac{DEF}{O'E}$. Or siccome si è dimostrato che i peri-

metri dei poligoni regolari di un medesimo numero di lati stanno fra loro come i raggi dei cerchi circoscritti, così considerandosi le circonferenze di questi cerchi come perimetri di poligoni regolari, i cui numeri di lati siano indefinitamente cresciuti, senza cessare però di essere regolari e simili, si ottiene che i limiti di ciascun poligono avendo quasi combaciato sulle circonferenze del cerchio circoscritto si può ottenere invece dall'e-

guaglianza $\frac{ABC}{OB} = \frac{DEF}{O'E}$ l'altra $\frac{circ. ABC}{OB} = \frac{circ. DEF}{O'E}$

ovvero $circ. ABC : circ. DEF :: OB : O'E$.

Secondo. La dimostrazione che la superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei medesimi raggi, è analoga alla precedente, poichè chiamando C e c le superficie dei cerchi, ed S e s quelle dei poligoni regolari simili iscritti ed R e r i raggi, si ha: $S : s :: R^2 : r^2$ ov-

vero $\frac{S}{s} = \frac{R^2}{r^2}$ sostituendo alle superficie dei poligoni quella dei cerchi, si ottiene $\frac{C}{c} = \frac{R^2}{r^2}$ ovvero $C : c :: R^2 : r^2$.

Quindi le superficie dei cerchi stanno fra loro come i quadrati dei raggi.

Corollario. Dall'eguaglianza $\frac{circ. ABC}{OB} = \frac{circ. DEF}{O'E}$ si ha ancora $\frac{circ. ABC}{2OB} = \frac{circ. DEF}{2O'E}$ quindi il rapporto di una circonferenza

al suo diametro è lo stesso per tutte le circonferenze, adunque esso è una quantità costante; questo rapporto viene dinotato ordinariamente da π .

Scolio. Chiamando R il raggio del cerchio e π il rapporto noto della circonferenza al diametro; la circonferenza verrà espressa da $2\pi R$. Infatti per quello che precedentemente si è dimostrato, essendo $\frac{\text{circ. ABC}}{2OB} = \pi$, così moltiplicando l'uno e

l'altro membro di questa eguaglianza per $2OB$ si otterrà, *circ. ABC* $= \pi \cdot 2OB$ ma si è detto che OB è il raggio del cerchio, quindi *circ. ABC* $= 2\pi R = 2R\pi$. Adunque, si ottiene la circonferenza di un cerchio moltiplicando il suo diametro per la quantità costante π .

Teorema XXV.

Gli archi simili stanno fra loro come i raggi ed i settori simili stanno fra loro come i quadrati de' medesimi raggi

1° Siano gli archi simili AB e DE , dico che essi stanno fra loro come i raggi — 2° Siano i settori simili AOB e $DO'E$, dico che essi stanno fra loro come i quadrati de' medesimi raggi (*fig. 208*).

Primo. Siccome il rapporto di due angoli al centro è sempre eguale a quello degli archi che essi intercettano fra i loro lati, così arco AB : *circ. AO* :: angolo AOB : 4 retti; similmente arco DE : *circ. DO'* :: angolo $DO'E$: 4 retti. Ora a causa della eguaglianza degli angoli AOB e $DO'E$ si ottiene *arc. AB*: *arc. DE* :: *circ. AO*: *circ. DO'*: si deduce, *arc. AB*: *arc. DE* :: AO : DO' .

Secondo. Si ha per la stessa causa, settore AOB : *cerchio AO* :: angolo AOB : 4 retti, e settore $DO'E$: *cerch. DO'* :: angolo $DO'E$: 4 retti, dunque settore AOB : settore $DO'E$:: *cerchio AO*: *cerch. DO'* :: AO^2 : DO'^2 ; si deduce, sett. AOB : sett. $DO'E$:: AO^2 : DO'^2 .

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XXVI.

L'area del cerchio è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del raggio

Sia il cerchio ADC dico che la sua area è eguale al prodotto della circonferenza per la metà del raggio AB (*fig. 209*).

Suppongasì che a questo cerchio vi sia circoscritto un poligono regolare di un'infinito numero di lati, e dinotando con S la superficie di questo poligono e con P il suo perimetro, si avrà per quello che già si è dimostrato $S = \frac{1}{2} BA \times P$. Ma se la superficie del poligono regolare circoscritto si va restringendo in modo che il perimetro, aumentato di un indefinito numero di lati, tocchi la circonferenza del cerchio, andrà a confondersi il limite del poligono con quello del cerchio, per conseguenza $P = \text{circ. ADC}$; or con tale aumento indefinito dei lati si ha sempre la precedente eguaglianza $S = \frac{1}{2} BA \times P$ quindi sostituendo al termine P di questa eguaglianza il suo eguale circ. ADC si ottiene $S = \frac{1}{2} BA \times \text{circ. ADC}$ ovvero cerchio ADC $= \frac{1}{2} BA \times \text{circ. ADC}$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Essendo l'area del cerchio eguale al prodotto della circonferenza per la metà del raggio, così cerch. ADC $= 2 \pi BA \times \frac{1}{2} BA = \pi \times BA^2$.

Dunque la superficie del cerchio è eguale ancora al prodotto del raggio elevato a quadrato per la quantità costante π .

Teorema XXVII.

L'area di un settore è eguale al prodotto del suo arco per la metà del raggio

Sia il settore ABC, dico che la sua area è eguale al prodotto del suo arco AC per la metà del raggio AB, in modo che si ha sett. ABC $= AC \times \frac{1}{2} AB$ (*fig. 209*).

Poichè due settori presi nello stesso cerchio o in cerchi eguali stanno tra loro come gli archi compresi fra i loro lati, così si ha: settore ABC: cerchio B :: arco AC: cir. ACD :: arc. $AC \times \frac{1}{2} AB$: cir. $ACD \times \frac{1}{2} AB$. Ma cerchio B è eguale a circonferenza $ACD \times \frac{1}{2} AB$, dunque settore ABC = arco AC $\times \frac{1}{2} AB$. Resta perciò dimostrato che l'area di un settore è eguale al prodotto del suo arco per la metà del raggio.

Corollario. Il segmento AC è eguale alla differenza fra il settore ABC ed il triangolo BCA.

Teorema XXVIII.

La corona circolare è equivalente ad un cerchio che ha per diametro una corda del cerchio maggiore tangente al cerchio minore.

Sia la corona circolare compresa fra le due circonferenze ACBD ed EFIG, dico che è equivalente ad un cerchio che ha per diametro la corda AB del cerchio maggiore, tangente al cerchio minore (fig. 240).

Infatti perchè l'area di questa corona è eguale alla superficie del cerchio maggiore sottratta quella del cerchio minore si ha $\pi \times OA^2 - \pi \times OE^2 = \pi(OA^2 - OE^2)$ ora il triangolo OEA essendo rettangolo dà $OA^2 - OE^2 = AE^2$ dunque sostituendo nel secondo membro della prima eguaglianza ad $OA^2 - OE^2$ la sua eguale AE^2 si ottiene $\pi \times OA^2 - \pi \times OE^2 = \pi \times AE^2$ quindi la corona circolare compresa fra le due circonferenze ACBD ed EFIG è equivalente al cerchio che ha per diametro AB, corda del cerchio maggiore, e tangente al cerchio minore.

Scolio. L'area di una corona circolare è eguale pure al prodotto della differenza dei due raggi del cerchio maggiore e di quello minore per la semisomma delle due circonferenze dei medesimi cerchi. Infatti $\pi(OA^2 - OE^2) = \pi(OA + OE)(OA - OE) =$

$$\pi(OA + OE) AM = \frac{2\pi OA + 2\pi OE}{2} \times AM.$$

Corollario. La parte AMNP di corona circolare, compresa fra i due raggi OA ed OP è eguale pure al prodotto della differenza dei due raggi del cerchio maggiore e di quello minore per la semisomma dei due archi AP ed MN.

Teorema XXIX.

Il quadrato del lato di un pentagono regolare iscritto è eguale al quadrato del raggio, più il quadrato del lato del decagono regolare iscritto nello stesso cerchio.

Sia il pentagono ABCDE regolare iscritto, dico che il quadrato di un lato è eguale al quadrato del raggio OF più il quadrato del lato AF del decagono regolare iscritto nello stesso cerchio (*fig. 211*).

Infatti l'angolo al centro AOB è $\frac{4}{5}$ di un retto, perchè si è già detto, che essendo tutti gli angoli al centro di un poligono regolare eguali fra loro, il valore di ciascuno di essi, è eguale alla somma di quattro angoli retti divisa pel numero dei lati del poligono, quindi l'angolo al centro AOF del decagono regolare è eguale a $\frac{2}{5}$ di un retto e la retta AF è eguale alla retta FB. Or si divida l'arco AF in due parti eguali nel punto G si tiri il raggio FO e la retta FH; le due rette AH ed FH sono eguali perchè oblique equidistanti dalla perpendicolare OG ed il triangolo AHF è isoscele, come ancora è isoscele il triangolo FAB. Dalla similitudine di questi due triangoli a causa dell'angolo A di comune si ha la proporzione AH: AF :: AF: AB quindi $AF^2 = AH \times AB$. Parimente il triangolo AOB è isoscele; ed a causa dell'angolo B di comune, è simile al triangolo BOH puranche isoscele per l'eguaglianza dei due angoli O e B eguali, essendo ciascuno eguale a $\frac{3}{5}$ di un retto, quindi si ha la proporzione HB: BO :: BO: AB, laonde $BO^2 = HB \times AB$. Ma $AH \times AB + HB \times AB$ rappresenta il quadrato di AB dunque $AB^2 = AF^2 + BO^2$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Il quadrato del lato di un triangolo regolare iscritto è eguale a quattro volte il quadrato dell'esagono, meno il quadrato del raggio; ovvero il quadrato del lato del triangolo è triplo di quello del raggio. Infatti (*fig. 212*) la figura ABCD è un rombo, ed essendo AD eguale a DB sarà $AC^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 - DB^2$ ovvero $AC^2 = 3AB^2$. Se si suppone $AB = 1$ si avrà $AC = \sqrt{3}$ dunque il lato del triangolo equilatero iscritto sta al raggio come la radice quadrata di 3 sta all'unità: quindi si ha ancora che il lato dell'esagono regolare iscritto è eguale al raggio dello stesso cerchio.

Teorema XXX.

Se si hanno due poligoni regolari di egual numero di lati l'uno iscritto e l'altro circoscritto ad un cerchio, e due altri poligoni regolari di un doppio numero di lati anche l'uno iscritto e l'altro circoscritto allo stesso cerchio, la semisomma dei perimetri dei due primi poligoni sta al primo iscritto come quello simile circoscritto sta a quello doppio di lati anche circoscritto.

Siano HGI e DEF due poligoni regolari di egual numero di lati l'uno iscritto e l'altro circoscritto, e siano AHBGCI e PONMLQ due altri poligoni regolari di un doppio numero di lati anche l'uno iscritto e l'altro circoscritto allo stesso cerchio, dico che

$$\frac{\text{per.}^\circ \text{ HGI} + \text{per.}^\circ \text{ DEF}}{2} : \text{per.}^\circ \text{ HGI} :: \text{per.}^\circ \text{ PONMLQ} : \text{per.}^\circ \text{ DEF} \quad (\text{fig. 245}).$$

Si tirino le rette RF, RP ed il raggio RH. Or poichè la retta RF passa pel punto A ed incontra il perimetro del poligono DEF nel punto F, è il raggio del cerchio circoscritto a questo poligono, parimente la retta RP incontrando il perimetro del poligono PONMLQ nel punto P è la bisettrice dell'angolo HRF, ed è il raggio del cerchio circoscritto a questo poligono. Quindi per tale bisettrice si ha FP: PH :: FR: RH: ma i perimetri

dei due poligoni HGI e DEF sono benanche proporzionali ai raggi, dunque *per.*^o DEF: *per.*^o HGI:: FR:RH, ovvero *per.*^o DEF: *per.*^o HGI:: FP:PH, aggiungendo a ciascuno antecedente il suo conseguente si ottiene *per.*^o DEF + *per.*^o HGI: *per.*^o HGI:: FP + PH: PH ovvero *per.*^o DEF + *per.*^o HGI: *per.*^o HGI:: FH: PH e dividendo *per.*^o DEF + *per.*^o HGI

metà ciascuno antecedente si ha $\frac{\text{FH}}{2}$:

per.^o HGI:: $\frac{\text{FH}}{2}$: PH. Ma, essendo FH contenuto in DEF 6 volte ed il lato PH è contenuto 12 volte in PONMLQ,

così dunque *per.*^o DEF: *per.*^o PONMLQ:: $\frac{\text{FH}}{2}$: PH; pa-

ragonando queste due proporzioni e visto che esse hanno un rapporto di comune, gli altri due staranno in proporzione per conseguenza $\frac{\text{per.}^{\circ} \text{DEF} + \text{per.}^{\circ} \text{HGI}}{2}$:

per.^o HGI:: *per.*^o DEF: *per.*^o PONMLH.

Scolio. Essendo HS contenuto 6 volte in HGI ed AH lo stesso numero di volte in AHBGCI si ha: *per.*^o HGI: *per.*^o AHBGCI:: HS: AH; ma i perimetri de' due poligoni AHBGCI e PONMLQ stanno tra loro come i raggi RH ed RP dei cerchi circoscritti, quindi *per.*^o AHBGCI: *per.*^o PONMLQ:: RH: RP.

E poichè i due triangoli rettangoli ASH ed RHP hanno l'angolo AHS eguale a HRP, perchè metà dell'angolo al centro ARH daranno la proporzione HS: AH:: RH: RP dalla quale si deduce *per.*^o HGI: *per.*^o AHBGCI:: *per.*^o AHBGCI: *per.*^o PONMLH, dunque il perimetro del poligono iscritto di un numero doppio di lati è medio proporzionale fra quello circoscritto dello stesso numero di lati e quello iscritto della metà di numero di lati.

Teorema XXXI.

Se si hanno i medesimi quattro poligoni, la semisomma delle superficie de' due poligoni iscritti sta a quella del primo iscritto come quella del poligono circoscritto sta a quella del poligono doppio di lati anche circoscritto allo stesso cerchio.

Siano i medesimi poligoni HGI, DEF, AHBGCI e
 $\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI}$

PONMLQ dico che $\frac{\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI}}{2} : \text{sup. HGI} ::$

$\text{sup. DEF} : \text{sup. PONMLQ}$ (fig. 244).

Infatti, essendo il triangolo rettangolo HRS, contenuto sei volte nel poligono HGI ed il triangolo HRA contenuto lo stesso numero di volte nel poligono AHBGCI si ha la proporzione: $\text{sup. HGI} : \text{sup. AHBGCI} :: \text{HRS} : \text{HRA}$ e poichè i due triangoli HRS ed HRA, hanno la stessa altezza HS, stanno fra loro come le basi, quindi $\text{HRS} : \text{HRA} :: \text{RS} : \text{RA}$, ovvero $\text{HRS} : \text{HRA} :: \text{RS} : \text{RH}$; ma nel triangolo rettangolo FHR si ha: $\text{RS} : \text{RH} :: \text{RH} : \text{FR}$; dunque $\text{HRS} : \text{HRA} :: \text{RH} : \text{FR}$, ovvero $\text{sup. HGI} : \text{sup. AHBGCI} :: \text{RH} : \text{FR}$; aggiungendo, in questa proporzione a ciascun conseguente il suo antecedente, si ottiene $\text{sup. HGI} : \text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI} :: \text{RH} : \text{FR} + \text{RH}$ e dividendo per 2 i conseguenti si ha

$$\text{sup. HGI} : \frac{\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI}}{2} :: \text{RH} : \frac{\text{FR} + \text{RH}}{2}.$$

Ora essendosi dimostrato nel teorema precedente che $\text{PH} : \text{FP} :: \text{RH} : \text{FR}$, aggiungendo come sopra a ciascun conseguente il suo antecedente si ha $\text{PH} : \text{FP} + \text{PH} :: \text{RH} : \text{FR} + \text{RH}$ ovvero $\text{PH} : \text{FH} :: \text{RH} : \text{FR} + \text{RH}$ e dividendo

$$\text{per 2 i conseguenti si ha } \text{PH} : \frac{\text{FH}}{2} :: \text{RH} : \frac{\text{FR} + \text{RH}}{2}$$

Ma $\text{HRP} : \text{HRF} :: \text{PH} : \text{FH}$; quindi $\text{HRP} : \frac{\text{HRF}}{2} :: \text{RH} : \frac{\text{FR} + \text{RH}}{2}$

ed a causa che il triangolo HRP è contenuto dodici volte in PONMLQ ed HRF sei volte in FDE si ha $\text{sup. PONMLQ} : \text{sup. FDE} :: \text{HRP} : \frac{\text{HRF}}{2}$; ovvero,

$\text{sup. PONMLQ} : \text{FDE} :: \text{RH} : \frac{\text{FR} + \text{RH}}{2}$; ma si è dimo-

strato che $\text{sup. HGI} : \frac{\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI}}{2} :: \text{RH} : \frac{\text{FR} + \text{RH}}{2}$

quindi $\text{sup. PONMLQ} : \text{sup. FDE} :: \text{sup. HGI} : \frac{\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI}}{2}$

ed in ultimo si conclude che $\text{sup. AHBGCI} + \text{sup. HGI} : \text{sup. HGI} :: \text{sup. FDE} : \text{sup. PONMLQ}$

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Essendo il triangolo HRA contenuto sei volte nel poligono AHBGCI ed il triangolo HRF lo stesso numero di volte nel poligono DEF si ha $\text{sup. AHBGCI} : \text{sup. DEF} :: \text{HRA} : \text{HRF}$; ma si è dimostrato che $\text{HRS} : \text{HRA} :: \text{RH} : \text{RF}$ ovvero $\text{sup. HGI} : \text{sup. AHBGCI} :: \text{RH} : \text{RF}$, si deduce che $\text{sup. AHBGCI} : \text{sup. DEF} :: \text{sup. HGI} : \text{sup. AHBGCI}$, ed invertendo si ottiene $\text{sup. DEF} : \text{sup. AHBGCI} :: \text{sup. AHBGCI} : \text{sup. HGI}$; dunque il poligono iscritto, di un numero doppio di lati dei due simili, iscritto e circoscritto al medesimo cerchio, è medio proporzionale fra essi.

Teorema XXXII.

Se per un punto preso nell'interno di un cerchio, si conduca un raggio e sul suo prolungamento si prenda un punto, in modo che lo stesso raggio sia medio proporzionale tra le distanze dei medesimi due punti al centro, le rette che uniscono questi punti con uno qualunque della circonferenza stanno sempre nello stesso rapporto.

Se per un punto A , preso nell'interno di un cerchio, si conduca un raggio OC e sul suo prolungamento CD si prenda un punto D in modo che $OA:OC::OC:OD$; dico che le rette MD ed MA tirate da un punto qualunque M della circonferenza ai due A e D staranno sempre nello stesso rapporto (*fig. 214*) e si avrà $MA:MD::CA:CD$.

Infatti, poichè $OA:OC::OC:OD$ si ottiene ancora $OA:OM::OM:OD$, ed i due triangoli MOA ed MOD sono simili perchè hanno l'angolo MOD di comune ed i lati che formano questo angolo rispettivamente proporzionali; dunque il lato MA sta al lato MD come AO sta OM , ovvero come $OA:OC$, quindi $MA:MD::OA:OC$, or dividendo la proporzione $OA:OC::OC:OD$ si ha $OA:OC::OC—OA:OD—OC$ ovvero $OA:OC::CA:DC$ per conseguenza $MA:MD::CA:DC$. Ciò che volevasi dimostrare.

PROBLEMI

RELATIVI AL TERZO E QUARTO LIBRO

Problema I.

Dividere una retta data in quante parti eguali si voglia, oppure in parti proporzionali a delle rette date.

Sia data la retta AB vogliasi dividere — 1° in tre parti eguali — 2° in parti proporzionali alle tre rette X, Y, Z (*fig. 215*).

Primo. Dal punto A si tiri una retta indefinita AC in modo che faccia con quella data un'angolo qualunque CAB; si prenda sulla AC una parte ad arbitrio AD e si porti tre volte sulla medesima retta, notando i punti di divisione D, E, F; si congiunga il punto F col punto estremo B mediante la retta FB, e dagli altri due punti di divisione E e D si conducano le rette EG e DI parallele ad FB, dico che la retta AB rimarrà divisa in tre parti eguali AI, IG e GB. Infatti le rette DI, EG ed FB essendo parallele, dividono i lati AB ed AF in parti proporzionali, ma FE, ED e DA sono per costruzione eguali, dunque sono benanche eguali le parti AI, IG e GB.

Secondo. Vogliasi dividere AB in parti proporzionali alle tre rette X, Y, Z (*fig. 216*). Si conduca dal punto A la retta indefinita AC e su questa retta si prendano tre parti, AG eguale X, GO eguale ad Y ed OM eguale a Z, si congiunga il punto M col punto estremo B e dai punti di divisione O e G si tirino le due rette ON e GP parallele ad MB, dico che la retta AB rimarrà divisa in tre parti AP, PN ed NB proporzionali alle date rette X, Y, e Z. Infatti a cause delle dette parallele, rimangono i lati AB ed AM divisi in parti proporzionali, ma AG, GO ed OM sono, per costruzione, eguali rispettivamente ad X, Y e Z, dunque la retta AB resta anche divisa in parti proporzionali ad X, Y e Z.

Problema II.

Trovare una quarta proporzionale in ordine a tre rette date.

Vogliasi trovare una quarta proporzionale in ordine alle tre rette date A, B, C (*fig. 217*).

Si tirino due rette indefinite DE ed FE in modo che facciano un'angolo qualunque DEF. Si prenda sul lato DE una parte EM eguale ad A, ed una parte MG eguale a B; parimente sopra EF si prenda una parte EN eguale a C, si congiunga il punto M col punto H e si tiri GH parallela ad MN, dico che NH è la quarta proporzionale cercata. Infatti a causa delle due parallele MN e GH i lati EG ed EH rimangono divisi in parti proporzionali, quindi $EM:MG::EN:NH$, ma EM, MG, EN sono eguali rispettivamente ad A, B, C, dunque $A:B::C:NH$.

Scolio. Se vogliasi trovare la terza proporzionale alle due rette A e B si faccia la stessa costruzione, prendendo cioè EM eguale ad A, MG eguale a B ed EN pure eguale alla seconda retta B; NH è la terza proporzionale, poichè essa è la stessa che la quarta proporzionale in ordine alle rette EM eguale ad A, MG ed EN, che sono rispettivamente eguali a B.

Problema III.

Trovare una media proporzionale fra due rette date.

Vogliasi trovare una media proporzionale fra due rette date A, B.

Poichè in un triangolo rettangolo, la perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto sull'ipotenusa è media proporzionale fra i due segmenti adiacenti, e ciascun cateto è medio proporzionale fra l'ipotenusa e la sua proiezione sulla stessa; dippiù da un punto dato fuori di un cerchio condotte una tangente ed una secante, la tangente è media proporzionale fra la secante e la parte esterna, così ciascuna delle tre costruzioni seguenti, inerenti a tali enunciati, risolveranno pienamente il problema.

1° Su di una retta indefinita CD (*fig. 218*) prendasi una parte CE eguale ad A ed una parte EG eguale a B: dal punto E tirisi la perpendicolare EO, e presa la retta CG come diametro

descrivasi una semicirconferenza la quale taglierà la retta EO nel punto M dico che ME è la media proporzionale cercata. Infatti il punto M è lo stesso vertice dell'angolo retto del triangolo rettangolo CMG e poichè ME è la perpendicolare abbassata sull'ipotenusa GC ed i due segmenti sono eguali rispettivamente ad A e B si ha $A : ME :: ME : B$.

2° Si tiri una retta CD eguale alla retta maggiore B (fig. 219) si prenda su di essa una parte CE eguale alla retta A, e sulla intera retta CD presa come diametro si descriva una semicirconferenza; s'innalzi dal punto E la perpendicolare EM e si tiri la corda CM. dico che questa è la media proporzionale cercata. Infatti il punto M come già innanzi si è dimostrato è lo stesso del vertice dell'angolo retto del triangolo rettangolo CMD, quindi il cateto CM è medio proporzionale fra l'ipotenusa CD e la sua proiezione CE; ma CD e CE sono rispettivamente eguali a B ed A, dunque si ha $B : CM :: CM : A$.

3° Si prenda la retta CD eguale alla retta maggiore B (fig. 220) e su di essa si prenda una parte CE eguale ad A, e facciasi passare una circonferenza fra i punti E e D, indi dal punto C si meni la tangente CO, questa è la media proporzionale cercata. Infatti si ha $CD : CO :: CO : CE$; ma CD e CE sono eguali rispettivamente a B ed A, dunque $B : CO :: CO : A$.

Problema IV.

Dividere una retta in media ed estrema ragione, cioè dividerla in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale fra la retta intera e la parte minore.

Sia data la retta AB da dividersi giusta l'enunciato del problema (fig. 221).

Dal punto estremo A si tiri la perpendicolare AC e su di essa si prenda una parte AD eguale alla metà della retta AB; dal punto D come centro e col raggio DA si descriva una circonferenza che passerà pel punto A e si tiri la retta DB che incontrerà la circonferenza descritta nel punto E, indi si prenda una parte BO eguale a BE dico che AB rimarrà divisa in O in media ed estrema ragione in modo che si ha $AB : OB :: OB : AO$.

Infatti prolungando la retta BE fino all'incontro della circonferenza nel punto I, ed essendo AB perpendicolare al raggio AD,

è tangente al cerchio AEI, quindi $BI : AB :: AB : BE$ ovvero $BI : AB :: AB : BO$, dividendo si avrà $BI - AB : AB :: AB - BO : BO$.

E poichè $BI - AB$ è eguale $BE = BO$, ed $AB - BO$ è eguale ad AO , quindi l'ultima proporzione corrisponde a $BO : AB :: AO : BO$ ed invertendo $AB : BO :: BO : AO$.

Scolio. La segante IB è anche divisa in media ed estrema ragione nel punto E perchè essendo $AB = EI$ si ha la proporzione $BI : EI :: EI : BE$.

Problema V.

Da un punto dato in un angolo condurre una retta in modo che le parti comprese fra questo punto ed i due lati dell'angolo siano eguali.

Condurre dal punto dato C nell'angolo BAD, una retta, in modo che le parti comprese fra questo punto, ed i due lati dell'angolo, siano eguali (fig. 222).

Si tiri dal punto C la retta CO in modo che incontri il lato AD e che sia parallela all'altro lato AB, si prenda una parte OE eguale ad OA e per i punti E e C conducasi la retta ECM, dico che EC è eguale a CM.

Infatti essendo la retta OC parallela ad AM si ha la proporzione $EO : OA :: EC : CM$; ma EO è eguale per costruzione ad OA, dunque anche EC è eguale a CM.

Scolio. Se dal punto C dato nell'angolo BAD si avesse voluto condurre una retta ECM compresa fra i lati dell'angolo in modo che le parti EC e CM fossero state tra loro come due rette X ed Y, allora si sarebbe tirata la retta CO parallela ad AM e prese le rette EO ed OA, in modo da avere la proporzione $EO : OA :: X : Y$ e tirata la retta ECM, il problema sarebbe stato risoluto, poichè a causa delle dette parallele, $EC : CM :: EO : OA$ ovvero $EC : CM :: X : Y$.

Problema VI.

Trasformare un poligono in un triangolo equivalente.

Sia dato il poligono ABCDE, vogliasi trasformare in un triangolo equivalente (fig. 223).

Si tiri da un vertice qualunque A la diagonale AC che sottende i due lati AB e BC: dal punto B si tiri BF parallela ad AC, e si prolunghi DC fino all'incontro della BF e si congiunga il punto A col punto F. I due triangoli ACF ed ABC avendo la stessa base AC e la medesima altezza, perchè compresi fra le parallele AC e BF sono equivalenti, quindi il pentagono ABCDE è equivalente al quadrilatero AFDE. Or se si tiri la diagonale AD e si faccia la stessa costruzione tirando dal punto E la retta GE parallela ad AD fino all'incontro della CD prolungata in G, e congiungendo AG, a causa dell'equivalenza dei due triangoli AED ed AGD, il quadrilatero AFDE sarà equivalente al triangolo AFG: dunque il dato poligono viene trasformato nel triangolo equivalente AFG. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se l'enunciato del problema fosse stato. Trasformare un poligono dato in un'altro equivalente e di un lato di meno bastava nella costruzione arrestarsi alla trasformazione del pentagono ABCDE nel quadrilatero AFDE: dunque con la medesima costruzione si può sempre trasformare un poligono di qualsivoglia numero di lati, o in un triangolo equivalente o in un altro poligono anche equivalente ma di un numero dato di lati di meno.

Problema VII.

Fare un quadrato che sia eguale alla somma oppure alla differenza di due quadrati dati.

Siano i due quadrati ABCD ed OEFG, vogliasi fare un quadrato eguale alla loro somma oppure alla loro differenza (fig. 224).

Si tiri la retta indefinita MN e si prenda su di essa una parte NH eguale al lato del quadrato OEFG: e dal punto N s'innalzi la perpendicolare NP e si prenda su di essa una parte NO eguale al lato del quadrato ABCD, si tiri la retta OH dico che questa è il lato del quadrato cercato.

Infatti essendo ONH un triangolo rettangolo, così il quadrato fatto sull'ipotenusa OH è eguale alla somma dei quadrati fatti sopra i cateti ON ed NH, ma questi due cateti sono rispettivamente eguali ai lati dei due quadrati GF e DC dunque OH è il lato del quadrato cercato.

Se bisogna fare un quadrato eguale alla differenza dei due quadrati si faccia parimente l'angolo retto MNP, indi si prenda ON eguale al lato di un quadrato, e dal punto O, come centro e con un raggio eguale al lato dell'altro quadrato si descriva un arco di cerchio in modo che tagli la retta MN in un punto H, NH sarà il lato del quadrato cercato. Infatti essendo rettangolo il triangolo ONH si ha $OH^2 - ON^2 = NH^2$ ovvero $NH^2 = OEGF - ABCD$.

Problema VIII.

Fare un quadrato equivalente alla metà di un quadrato dato.

Sia dato il quadrato ABCD vogliasi costruire un quadrato equivalente alla metà di esso (fig. 225).

Si tirino le due diagonali AC e DB, dal punto C si tiri CO parallela DB e si prenda su di essa una parte CM eguale a CE, dico che il quadrato BECM è il quadrato cercato.

Infatti essendo BE eguale ad EC, e poichè le diagonali di un quadrato si tagliano scambievolmente ad angoli retti, si ha nel triangolo rettangolo BCE, $BC^2 = BE^2 + EC^2$ ovvero $BC^2 = 2BE^2$, quindi $\frac{1}{2} BC^2 = BE^2$; dunque il quadrato BECM è equivalente alla metà del dato quadrato ABCD.

Corollario. Se si volesse un quadrato doppio di un'altro quadrato dato, basterebbe costruire un quadrato sulla diagonale del quadrato dato.

Teorema IX.

Costruire un quadrato che stia ad un quadrato dato come una data ragione.

Vogliasi costruire un quadrato che stia al quadrato dato ABCD come la retta X sta alla retta Y (fig. 226).

Si tiri una retta indefinita EF e si prenda su di essa una parte EG eguale ad X, e GH eguale ad Y; con la retta EH presa come diametro descrivasi una circonferenza e s'innalzi dal punto G una perpendicolare in modo che incontri la circonferenza in un punto I. Poscia si tirino le corde IE ed IH, e su una di esse, si prenda una parte eguale al lato del quadrato ABCD, questa par-

te sia IN , si tiri dal punto N una parallela al diametro EF in modo che incontri l'altra corda IE nel punto N ; dico che IM è il lato del quadrato cercato.

Infatti essendo MN parallela ad EH si ha la proporzione $IE^2 : IH^2 :: IM^2 : IN^2$; or essendo il triangolo IEH rettangolo si ha la proporzione $IE^2 : IH^2 :: EG : GH$ ovvero $IM^2 : IN^2 :: EG : GH$; ma IN^2 è eguale ad $ABCD$, EG è eguale ad X e GH è eguale ad Y , dunque $IM^2 : ABCD :: X : Y$. Ciò che si cercava.

Problema X.

Descrivere un quadrato equivalente ad un parallelogrammo o ad un triangolo dato.

Vogliasi descrivere un quadrato che sia equivalente al parallelogrammo $ABCD$ oppure al triangolo EGF (fig. 227).

Primo. Si trovi una media proporzionale fra la base DC e l'altezza MN del parallelogrammo, dico che questa media proporzionale è il lato del quadrato. Infatti supponiamo che essa sia X si avrà la proporzione $DC : X :: X : MN$ quindi $DC \times MN = X^2$ ma il primo prodotto di questa eguaglianza rappresenta la superficie del parallelogrammo $ABCD$, dunque il quadrato fatto sopra X è equivalente a questo parallelogrammo.

Secondo. Si trovi una media proporzionale fra la base GF del dato triangolo e la metà della sua altezza EH , dico che essa sarà il lato del quadrato, infatti supposto che essa sia Y si ha come sopra si è detto $GF : Y :: Y : \frac{1}{2} EH$ e quindi $Y^2 = GF \times \frac{1}{2} EH$; ma quest'ultimo prodotto rappresenta la superficie del triangolo EGF dunque il quadrato fatto sopra Y è equivalente a questo triangolo.

Scolio. Potendosi trasformare un poligono in un triangolo equivalente, così è facile descrivere un quadrato equivalente ad un poligono di qualsivoglia numero di lati.

Problema XI.

Su di una data retta descrivere un rettangolo equivalente ad un altro rettangolo dato.

Sulla data retta AB vogliasi descrivere un rettangolo equivalente al rettangolo $MNOP$ (fig. 228).

Per risultare un rettangolo equivalente ad un altro, è mestieri che il prodotto della base moltiplicata per l'altezza di uno di essi sia eguale al prodotto della base moltiplicata per l'altezza dell'altro; or supposto che l'altezza ignota del rettangolo da costruirsi sia X , si avrà che $OP \times ON = AB \times X$ ovvero $AB : OP :: ON : X$; dunque per poter risolvere il problema bisogna trovare una quarta proporzionale in ordine alla base data del rettangolo da descriversi, alla base ed all'altezza dell'altro rettangolo dato; questa quarta proporzionale sarà l'altezza del nuovo rettangolo, quindi si troverà in tal modo risoluto il problema.

Problema XII.

Trovare due rette che stiano nel medesimo rapporto della superficie di due rettangoli dati.

Siano $ABCD$ ed $EFGH$ i due rettangoli dati, vogliansi trovare due rette che stiano nello stesso rapporto di questi due rettangoli (fig. 229).

La superficie del primo rettangolo è rappresentata da $DC \times CB$ e quella del secondo da $HG \times GF$, or siccome una delle due rette che si cercano può prendersi ad arbitrio così sia questa retta MN , e perchè questa retta deve stare all'altra ignota nello stesso rapporto che il primo rettangolo sta al secondo così supposto che l'ignota sia X si avrà $DC \times CB : HG \times GF :: MN : X$, quindi X è la quarta proporzionale in ordine a tre rette, cioè la prima che rappresenti il prodotto della base moltiplicata per l'altezza di uno dei rettangoli, la seconda anche il prodotto della base moltiplicata per l'altezza dell'altro rettangolo e la terza quella tirata ad arbitrio; trovata questa quarta proporzionale resta evidente la soluzione del presente problema.

Scolio. Se la retta MN presa ad arbitrio fosse stata eguale alla base DC del rettangolo $ABCD$ si avrebbe avuto $DC \times CB :$

$MN \times HG \times GF$

$HG \times GF :: MN : X$, quindi $X = \frac{MN \times HG \times GF}{DC \times CB}$ e dall'eguaglianza delle due rette MN e DC si sarebbe ottenuto $X = \frac{HG \times GF}{CB}$

ovvero $CB : HG :: GF : X$, quindi la quarta proporzionale sarebbe stato in ordine all'altezza CB del primo rettangolo, alla base ed all'altezza dell'altro rettangolo.

Problema XIII.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato ed in modo che la somma di due lati adiacenti sia eguale ad una retta data.

Sia dato il quadrato ABCD, vogliasi costruire un rettangolo equivalente a questo quadrato ed in modo che la somma di due lati adiacenti sia eguale ad una data retta MN (*fig. 230*).

Si tiri la retta EF eguale alla retta data MN e dal punto O medio di essa, come centro, e con un raggio OF si descriva una semicirconferenza che passerà per punti E ed F. S'innalzi dal punto E la perpendicolare EH eguale al lato del quadrato ABCD e dal punto H si tiri HG parallela ad EF, e si abbassi inoltre dal punto G sul diametro EF la perpendicolare GI dico che EI ed IF saranno i lati del rettangolo cercato.

Infatti, la somma di questi due lati è evidentemente eguale alla retta MN, dipiù la perpendicolare GI è media proporzionale fra i due segmenti EI ed IF, ma GI è eguale ad EH dunque $EH^2 = EI \times IF$.

Scolio. Perchè il problema sia possibile bisogna che il lato del quadrato non sia maggiore della metà della retta data.

Problema XIV.

Costruire un rettangolo equivalente ad un quadrato dato e che la differenza dei due lati adiacenti sia eguale ad una retta data.

Sia dato il quadrato ABCD e la retta MN vogliasi costruire un rettangolo eguale a questo quadrato, e che la differenza di due lati adiacenti sia eguale alla retta MN (*fig. 231*).

Si prenda la retta EF eguale ad MN e dal punto O medio di essa come centro e con un raggio OF si descriva una circonferenza, questa passerà per i punti E ed F. Dal punto E s'innalzi la perpendicolare EG eguale ad un lato del quadrato ABCD, e dal punto G tirisi la secante GI che passi pel centro O; dico che GH e GI sono i lati adiacenti del rettangolo cercato.

Infatti la differenza fra GI e GH è il diametro HI eguale per costruzione ad MN; dippiù le tangente EG è media proporzionale fra l'intera secante GI e le parte esterna GH dunque $EG^2 = GI \times GH$.

Problema XV.

Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due rette date e che facciano una somma data.

Siano date le due rette M, N, vogliasi trovare altre due rette che sieno reciprocamente proporzionali a queste due date e che facciano una somma data X (fig. 233).

Si tiri la retta AB eguale ad X, dal punto O medio di essa, come centro e col raggio OA, descrivasi una semicirconferenza, indi si tiri dal punto A la perpendicolare AD e su di essa si prenda una parte AE, che sia media proporzionale fra M ed N; si conduca inoltre dal punto E, la retta EG parallela ad AB e da G si abbassi GC perpendicolare ad AB, dico che AC e CB sono le due rette cercate.

Infatti, avendosi per costruzione $M : AE : AE : N$ ovvero $AE^2 = M \times N$; e poichè $AE^2 = AC \times CB$, si avrà per conseguenza $AC \times CB = M \times N$, quindi $AC : M :: N : CB$, dunque le due rette AC e CB sono reciprocamente proporzionali alle due rette M ed N e formano la data somma X. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. La medesima costruzione serve se vogliasi dividere la retta X in parti reciprocamente proporzionali alle due rette M ed N.

Problema XVI.

Trovare due rette che sieno reciprocamente proporzionali a due rette date e che abbiano fra loro una differenza data.

Siano date le due rette X ed Y, vogliansi trovare altre due rette che sieno reciprocamente proporzionali a queste due date e che abbiano fra loro una differenza MN (fig. 233).

Si prenda una retta AB eguale alla metà della data retta MN; dal punto A come centro e con un raggio AB descrivasi una circonferenza e si conduca dal punto B una tangente BD, indi si prenda su di essa una parte BC eguale ad una media proporzio-

nale fra le due rette X ed Y; finalmente si tiri CA e si prolunghi sino all'incontro della circonferenza in G, dico che GC ed IC, sono le due rette cercate.

Infatti, poichè per costruzione $X:BC::BC:Y$ ovvero $BC^2 = X \times Y$, e $BC^2 = GC \times CI$, si avrà $GC:X::Y:CI$, dunque le due rette GC e CI sono reciprocamente proporzionali alle due rette X ed Y e formano la data differenza GI eguale ad MN perchè per costruzione AB è eguale alla metà di MN. Ciò che volevasi dimostrare.

Problema XVII.

Dato un triangolo costruire un parallelogrammo equivalente, e che abbia un angolo eguale ad un angolo dato.

Sia dato il triangolo ABC vogliasi costruire un parallelogrammo equivalente e che abbia un angolo eguale all'angolo dato M (fig. 234).

Poichè ciascun triangolo è metà di un parallelogrammo che ha la medesima base e la stessa altezza, si prenda una retta GH eguale alla base BC del triangolo ABC, e dal punto H si faccia l'angolo GHI eguale ad M; e dallo stesso punto H si tiri la perpendicolare HF eguale alla metà dell'altezza AD del dato triangolo. Si conduca pel punto F la retta NO parallela a GH, e dal punto G si tiri la retta GL parallela ad OH dico che OLGH è il parallelogrammo cercato.

Infatti l'angolo GHI è per costruzione eguale all'angolo dato M, dippiù $BC \times \frac{1}{2} AD$ è eguale a $GH \times HF$.

Corollario. Per costruire un rettangolo equivalente ad un triangolo dato, basta elevare dai punti estremi B, C, della base del triangolo due perpendicolari eguali alla metà dell'altezza AD e condurre ai punti estremi di essa una retta parallela alla stessa base BC.

Problema XVIII.

Trovare un punto nell'interno di un triangolo in modo che condotte da questo punto tre rette ai vertici del triangolo medesimo questo rimanga diviso in tre parti equivalenti.

Sia dato il triangolo ABC, vogliasi trovare nell'interno di esso un punto in modo che condotto tre rette ai vertici A, B, C, rimanga lo stesso triangolo diviso in tre parti equivalenti (fig. 235).

Dal vertice A si abbassi la perpendicolare AD sul lato BC e dal vertice B si conduca la retta BE perpendicolare al lato AC. Dal punto I, terzo dell'altezza AD, a partire da D, si conduca GH parallela a BC, similmente dal punto F, terzo dell'altezza BE a partire da E, si conduca MN parallela ad AC, le due rette GH ed MN s'incontreranno in un punto O, e da esso condotta ai vertici le rette OA, OB, OC, dico che resterà il triangolo ABC diviso in tre parti equivalenti.

Infatti il triangolo OBC ha la medesima base BC dell'intero triangolo ABC, per altezza OI terza parte di AD; parimente il triangolo OAC ha per base AC e per altezza EF terza parte di BE; dunque il rimanente triangolo OAB, è per conseguenza anche il terzo di ABC. Ciò che volevasi dimostrare.

Problema XIX.

Dividere in due parti un triangolo con una retta parallela ad un lato e che queste parti stiano fra loro come una data ragione.

Sia dato il triangolo ABC, vogliasi dividere in due parti tali, con una retta parallela ad un lato, che stiano fra loro come la retta MN sta alla retta OP (fig. 236).

Si divida il lato AB in due parti AD, DB, in modo che stiano tra loro come MN sta ad OP; sullo stesso lato AB come diametro descrivasi una semicirconferenza e dal punto D si tiri DF perpendicolare ad AB e si conduca la corda AF. Inoltre sul medesimo lato AB si prenda AG eguale ad AF e dal punto G condotta la parallela GE a CB dico che il triangolo ABC rimarrà diviso in due parti proporzionali alla data ragione MN : OP.

Infatti dalla similitudine dei due triangoli ABC ed AGE si ha la proporzione $ABC : AGE :: AB^2 : AG^2$ ma $AB^2 : AF^2 :: AB : AD$ (lib. IV, Teor. VII) ed essendo AF eguale ad AG si ha $ABC : AGE :: AB : AD$, e dividendo si ha $ABC - AGE : AGE :: AB - AD : AD$ dunque $EGBC : AGE :: BD : AD$ ovvero $EGBC : AGE :: MN : OP$. Ciò che volevasi dimostrare.

Problema XX.

Descrivere un poligono simile ad un poligono dato su di una retta omologa ad uno dei lati di questo poligono.

Sia dato il poligono ABCDE vogliasi descrivere un'altro poligono simile sulla retta GH omologa al lato AE (fig. 237).

Nel dato poligono, dal punto A, si tirino le diagonali AC, AD; dal punto G della data retta GH si faccia l'angolo HGI eguale ad EAD, dal punto H si tiri HI omologo ad ED, le due rette GI ed HI si taglieranno nel punto I, ed il triangolo GHI è simile al triangolo AED. Parimente sopra IG omologo a DA si costruisca un triangolo GIL simile al triangolo ADC ed in ultimo sopra di GL omologo ad AC il triangolo GLM simile al triangolo ACB; dico che il poligono GMLHI è simile al poligono ABCDE.

Infatti due poligoni, composti di uno stesso numero di triangoli simili e similmente disposti, sono simili; dunque i due poligoni ABCDE e GMLHI avendo per costruzione lo stesso numero di triangoli simili e similmente disposti, sono simili.

Problema XXI.

Costruire un poligono simile a due poligoni dati e che sia equivalente alla loro somma, oppure alla loro differenza.

Siano dati i due poligoni ABCDE ed *abcde*, costruirne un altro simile, equivalente alla loro somma oppure alla loro differenza (fig. 238).

Siccome le figure simili stanno tra loro come i quadrati fatti sui lati omologhi, così chiamando X la superficie del poligono cercato ed Y il lato omologo, si avrà $ABCDE : abcde :: AB^2 : ab^2$, componendo ed invertendo si otterrà $ABCDE : ABCDE + abcde :: AB^2 : AB^2 + ab^2$. Ma $ABCDE : X :: AB^2 : Y^2$ e poichè deve essere $X = ABCDE + abcde$ queste due ultime proporzioni hanno i primi tre termini comuni, quindi $Y^2 = AB^2 + ab^2$. Adunque per risolvere il presente problema, bisogna che il nuovo poligono abbia per perimetro i lati di tanti quadrati equivalenti alla somma oppure alla differenza dei quadrati fatti sui lati dei poligoni ABCDE ed *abcde*. Ora essendo due pentagoni i poligoni dati, così si troveranno cinque lati di quadrati nel seguente modo: si disporranno a due a due in modo da formare angoli retti i lati omologhi, e congiunte le loro estremità, si avranno cinque triangoli rettangoli le cui ipotenuse saranno i lati del nuovo poligono cercato e ciò per essere il quadrato dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo eguale alla somma de' quadrati fatti sopra i cateti. Dunque chiamando FG, GH, HI, IL, LF, le ipotenuse di questi triangoli rettangoli, sarà FGHIL il poligono cercato. Notando altresì

che il quadrato fatto su di un cateto è eguale alla differenza dei quadrati fatti sull'ipotenusa e sull'altro cateto così si potrà ancora costruire un altro poligono eguale allè differenze dei due dati.

Problema XXII.

Costruire un poligono simile ad un poligono dato e che stiano fra loro come una data ragione.

Sia dato il poligono ABCDE, vogliasi costruire un'altro poligono simile e che stiano fra loro come $M:N$ (fig. 239).

Poichè si è detto più volte, che due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati dei lati omologhi, e basta trovare uno dei lati omologhi perchè si possa costruire un poligono simile ad un'altro, così è mestieri trovare, secondo il Problema IX, un lato GH che stia al lato AB come $M:N$ e su questo lato costruire il poligono GHIOR, che sarà quello cercato.

Infatti dall'enunciato del problema si ha $ABCDE:GHIOR::M:N$, ma questi due poligoni essendo simili danno ancora la proporzione $ABCDE:GHIOR::AB^2:GH^2$ dunque si avrà ancora $AB^2:GH^2::M:N$. Ciò che volevasi dimostrare.

Problema XXIII.

Costruire un poligono simile ad un poligono dato ed equivalente ad un altro poligono puranche dato.

Sia dato un poligono P, vogliasi costruire un'altro poligono simile ed equivalente all'altro poligono dato Q (fig. 240).

Il poligono che si cerca dovendo essere simile al poligono dato P, entrambi dovranno stare fra loro come i quadrati dei lati omologhi, e supponiamo che questi lati fossero AB e CD ed il poligono trovato T, si avrebbe la proporzione $P:T::AB^2:CD^2$; dovendo essere T equivalente a Q, in tal modo il lato CD sarebbe conosciuto, se il rapporto dei poligoni dati P, e Q potesse esprimersi per mezzo de' loro lati, lo che è impossibile, dappoichè i due poligoni dati non sono simili, dunque è mestieri trasformare i poligoni P e Q in due quadrati rispettivamente equivalenti.

Ciò fatto sia M il lato del primo quadrato ed N quello del secondo, si avrà $P:Q::M^2:N^2$, e poichè T è equivalente a Q , si deduce $M:N::AB:CD$, per conseguenza il problema vien risoluto trovando una quarta proportionale in ordine alle tre rette M , N , AB , ed a descrivere sul lato CD omologo di AB un poligono simile al poligono P , evidentemente T è il poligono cercato equivalente a Q e simile a P . Che è quanto volevasi dimostrare.

Problema XXIV.

Inscrivere in un semicerchio un triangolo rettangolo equivalente ad un quadrato dato.

Sia dato il semicerchio ABC vogliasi inscrivere in esso un triangolo rettangolo equivalente al quadrato dato $abcd$ (fig. 241).

Affinchè il problema sia risoluto è mestieri trovare una terza proportionale continua dopo il diametro AC ed il lato cd del quadrato dato. Sia questa retta M ; dal punto C si tiri la retta CE perpendicolare ad AC e su di essa a partire da C si prenda una parte CI doppia della retta trovata M , e dal punto I si conduca la IG che tocchi la circonferenza e che sia parallela al diametro AC , tirate le corde AG e GC dico che il triangolo rettangolo AGC è iscritto nel semicerchio ABC ed è equivalente al quadrato $abcd$.

Infatti questo triangolo ha i vertici de'suoi tre angoli sulla data semicirconferenza, dippiù ha per misura $CI \times \frac{AC}{2}$ ora per quello che sopra si è detto, si ricava dalla proporzione $AC:CI::cd:M=\frac{2cd^2}{AC}$, che $CI=\frac{2cd^2}{AC}$ dunque $cd^2=CI \times \frac{AC}{2}$

ma il primo membro di questa eguaglianza dinota il quadrato dato $abcd$ ed il secondo l'area del triangolo rettangolo AGC , dunque AGC è equivalente ad $abcd$.

Problema XXV.

Iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero in un cerchio.

Sia dato un cerchio qualunque ACE, vogliasi in esso iscrivere un esagono regolare ed un triangolo equilatero (*fig. 242*).

Dal punto A si tiri la corda AB eguale al raggio OA, dico che questa sarà il lato dell'esagono cercato. Infatti, condotto il raggio OB, il triangolo AOB è equilatero, poichè l'angolo al centro AOB, è la sesta parte di quattro angoli retti, ovvero è eguale a due terzi di un retto, e gli altri due angoli OAB, ed OBA valgono insieme $2 - \frac{2}{3}$ ovvero quattro terzi di due retti, ma essi sono eguali fra loro perchè opposti ai lati eguali AO ed OB, dunque ciascun di essi è eguale anche a $\frac{2}{3}$ di un retto; per conseguenza la corda eguale al raggio sottende un arco che è eguale alla sesta parte della circonferenza, quindi essa è il lato dell'esagono cercato. Congiunti alternativamente a due a due i vertici degli angoli dell'esagono per mezzo delle corde AE, AC, CE, il triangolo ACE è equilatero ed iscritto nel cerchio.

Problema XXVI.

Iscrivere un decagono ed un pentagono regolare in un cerchio.

Sia dato il cerchio ABC vogliasi in esso iscrivere un decagono ed un pentagono regolare (*fig. 243*).

Si tiri il raggio OC e si divida in media ed estrema ragione nel punto D; dal punto C come centro e con un raggio eguale al segmento maggiore DO descrivasi un arco di cerchio in modo che tagli la data circonferenza nel punto E, tirata la corda CE, dico che questo è il lato del decagono cercato. Infatti, condotto il raggio OE e la retta ED, poichè per costruzione $CO : OD :: OD : DC$, ed OD è eguale a CE, si ha la proporzione $CO : CE :: CE : DC$, quindi il triangolo CEO è simile al triangolo CDE per essere l'angolo C di comune compreso fra lati proporzionali. Laonde essendo il lato OC eguale ad OE, il triangolo CEO è isoscele, quindi anche CDE è isoscele, per conseguenza $CE = DE = DO$; dunque risulta isoscele anche il triangolo DOE.

Or l'angolo CDE, esterno al triangolo DOE, è doppio dell'angolo O, ed è eguale all'angolo DCE che è eguale a CEO, e poichè nel triangolo OCE ciascuno degli angoli alla base è doppio di quello al vertice, l'angolo O è dunque la quinta parte di due retti ovvero la decima parte di quattro retti, ma l'angolo al centro è misurato dall'arco compreso fra i suoi lati, quindi si deduce che l'arco CE è la decima parte della circonferenza e la corda CE è il lato del decagono cercato.

Unendo alternativamente a due a due i vertici del decagono regolare iscritto si ha il pentagono regolare iscritto.

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Essendo dato un cerchio è facile determinare il lato del quadrato, del triangolo equilatero, del pentagono, che in essa debbono essere iscritti. Infatti, essendo OB il raggio del cerchio dato (*fig. 244*) innalzata la perpendicolare BA eguale ad OB, tirata la retta AO questa è il lato del quadrato iscritto. Innalzato sopra di AO la perpendicolare AC eguale ad OB e tirata la retta CO questo è il lato del triangolo equilatero iscritto perchè il quadrato di OC è triplo del quadrato del raggio OB. In ultimo diviso il raggio OB in media ed estrema ragione nel punto D, il segmento maggiore DB è il lato del decagono iscritto e la retta DA il lato del pentagono.

Problema XXVII.

Iscrivere un pentadecagono regolare in un cerchio.

Sia dato il cerchio ABC vogliasi in esso iscrivere un poligono regolare di quindici lati (*fig. 245*).

Dal punto C si tiri la corda CM eguale al raggio OC, la quale sarà il lato dell'esagono regolare iscritto e fatta la medesima costruzione del precedente problema per trovare il lato CE del decagono regolare iscritto, si tiri la corda EM, dico che questa è il lato del pentadecagono cercato.

Infatti l'arco CM è la sesta parte della circonferenza e l'arco CE è la decima parte della medesima circonferenza, quindi l'arco EM essendo differenza dei due archi CM e CE è eguale alla quindicesima parte della stessa circonferenza, dunque la corda EM è il lato del pentadecagono regolare iscritto nel cerchio ABC.

Scolio. Il lato del pentedecagono regolare iscritto è anche il segmento minore del raggio diviso in media ed estrema ragione.

Corollario. Essendo dato un poligono regolare iscritto in un cerchio, si può sempre trovare un altro poligono regolare di numero doppio di lati, anch'esso iscritto, conducendo le corde dai vertici ai punti medi degli archi che sottendono i lati del poligono dato.

Problema XXVIII.

Essendo dato un poligono regolare qualunque circoscrivere allo stesso ed iscrivere in esso un cerchio.

Sia dato il poligono regolare ABCDEF vogliasi allo stesso circoscrivere ed iscrivere in esso un cerchio (fig. 242).

Primo. Poichè le rette che dividono in due parti eguali gli angoli di un poligono regolare iscritto o circoscritto s'incontrano al centro del cerchio e formano col perimetro tanti triangoli isosceli eguali, quanti sono i lati, così divisi gli angoli A, B, C, D, E, F, del medesimo poligono, per mezzo delle rette AO, BO, CO, DO, EO, FO, e dal punto O come centro, e con un raggio eguale ad una delle stesse rette, descritta una circonferenza, questa evidentemente passerà per tutti i vertici degli angoli del dato poligono ABCDEF, quindi il cerchio sarà circoscritto allo stesso poligono.

Secondo. Trovato il centro O, del cerchio circoscritto, ed abbassata da questo punto su di un lato AB una perpendicolare OG, e perchè le corde AB, BC, CD, DE, EF, FA, sono eguali, si allontanano egualmente dal punto O centro del cerchio circoscritto, quindi la retta OG, misurando questa distanza, il cerchio descritto dal punto O come centro e col raggio OG toccherà i punti medi dei lati del poligono dato e sarà iscritto nello stesso poligono.

Corollario. Il centro O comune del cerchio iscritto e circoscritto, può riguardarsi come il centro del poligono regolare; poichè dall'eguaglianza dei lati dello stesso poligono, gli angoli al centro sono eguali, ed il loro valore si ottiene dividendo quattro angoli retti pel numero dei medesimi lati.

Problema XXIX.

Essendo dato un poligono regolare iscritto, circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile.

Sia dato il poligono regolare ABCDEF iscritto, vogliasi circoscrivere alla stessa circonferenza un poligono simile (fig. 242).

Dal centro O si tiri il raggio OS, perpendicolare ad AB, e si conduca dal punto S la tangente PH, parallela ad AB. Parimente dai punti medi di ciascuno degli altri archi si tirino le tangenti parallele ai lati del poligono iscritto, dico che PHILMN è il poligono cercato.

Infatti, si tiri OR perpendicolare ad AN, i tre punti O, A, P, sono in linea retta, i due triangoli rettangoli OSP ed OPR, perchè hanno un angolo eguale ad un angolo, compresi fra lati rispettivamente eguali, sono eguali; dunque l'angolo SOP è eguale all'angolo POR, per conseguenza la retta OP passa pel punto A medio dell'arco FAB, or a causa della simiglianza dei triangoli OPH ed OAB e delle parallele PH ed AB si ha la proporzione $PH:AB::OP:OA$, come ancora per la stessa ragione $NP:AF::OP:OA$, dunque $PH:AB::NP:AF$; ma AB è eguale ad AF per conseguenza PH è eguale ad NP ed il poligono circoscritto PHILMN è regolare e simile ad ABCDEF.

Corollario. Se il poligono dato fosse stato invece circoscritto al cerchio, e si avrebbe voluto inscrivere nel cerchio medesimo un poligono simile a quello dato, sarebbe bastato congiungere consecutivamente i punti di contatto, con la circonferenza, delle rette tirate dal centro ai vertici del poligono circoscritto.

Problema XXX.

Dati il raggio e l'apotema di un poligono regolare, calcolare il raggio e l'apotema di un poligono regolare equivalente, ma di un numero doppio di lati.

Dati il raggio OA e l'apotema OF, di un poligono regolare, vogliasi calcolare il raggio e l'apotema di un poligono regolare equivalente ma di un numero doppio di lati (fig. 246).

Sia CAB il poligono regolare dato; si trasformi il triangolo OAF in un triangolo isoscele ODE equivalente. Poichè il triangolo OAF è metà del triangolo OAB, la retta DE è il lato del poligono cercato, O ne è il centro, quindi OE è il raggio ed OG l'apotema del poligono regolare equivalente di un numero doppio di lati.

Ora essendo equivalenti i due triangoli OAF ed ODE ed avendo l'angolo O di comune si avrà $OA : OD :: OE : OF$, ovvero $OE^2 = OA \times OF$, per conseguenza $OE = \sqrt{OA \times OF}$; dunque il raggio del poligono cercato è eguale alla radice quadrata del prodotto che si ottiene moltiplicando il raggio per l'apotema del poligono dato.

Dippiù, essendo i due triangoli rettangoli AFC ed OEG equiangoli si avrà $OG : FC :: EG : AF$, e dividendo i conseguenti per metà si avrà $OG : \frac{FC}{2} :: EG : \frac{AF}{2}$.

E poichè i due triangoli OAF ed ODE sono equiangoli, hanno le basi e le altezze inversamente proporzionali, quindi $OF : OG :: DE : AF$; ponendo invece di DE e di AF le loro metà, si avrà $OF : OG :: EG : \frac{AF}{2}$, paragonando questa proporzione

con l'altra $OG : \frac{FC}{2} :: EG : \frac{AF}{2}$, si ricava $OF : OG :: OG : \frac{FC}{2}$

ovvero $OG = \sqrt{OF \times \frac{FC}{2}}$. Ma FC è eguale ad $OF + OA$,

per conseguenza $OG = \sqrt{OF \times \frac{OF + OA}{2}}$; dunque l'apotema

del poligono cercato è eguale alla radice quadrata della metà del prodotto che si ottiene, moltiplicando l'apotema del poligono dato, per la somma della stessa apotema e del raggio del cerchio circoscritto allo stesso poligono.

Problema XXXI.

Dati il raggio e l'apotema di un poligono regolare calcolare il raggio e l'apotema di un poligono regolare isoperimetro di un numero doppio di lati.

Dati il raggio AO e l'apotema OF di un poligono regolare, vogliasi calcolare il raggio e l'apotema di un poligono regolare isoperimetro di un numero doppio di lati (fig. 247).

Sia il poligono regolare CAB, si prolunghi l'apotema OF, sino all'incontro della circonferenza nel punto C; indi si tiri dal centro O, la perpendicolare OD sul lato AC, e dal suo piede D, si conduca la retta DE parallela ad AB. E poichè l'angolo ACB metà dell'angolo al centro AOB, sarà l'angolo del poligono cercato, e la retta DE sarà il lato di questo poligono, giacchè a causa della simiglianza dei due triangoli CAB e CDE, essa è la metà di AB, quindi CD sarà il raggio ed IC l'apotema del poligono isoperimetro di un numero doppio di lati.

Or essendo simili i due triangoli CAF e CDI ed $AD = DC$ si avrà $IC = \frac{CF}{2} = \frac{CO + OF}{2}$ dunque l'apotema del poligono cercato è eguale alla semisomma del raggio e dall'apotema del dato poligono.

Dippiù essendo la retta DI una perpendicolare abbassata dal vertice dell'angolo retto D, nel triangolo rettangolo ODC, sulla ipotenusa OE, si avrà $CD^2 = CO \times CI$ ovvero $CD = \sqrt{CO \times CI}$

dunque il raggio del poligono cercato, è eguale alla radice quadrata del prodotto che si ottiene moltiplicando il raggio del dato poligono per l'apotema del poligono isoperimetro di un numero doppio di lati.

Corollario. Da quanto finora si è detto, circa i poligoni regolari iscritti, e circoscritti ad un cerchio, si ricava:

1° Che il lato del quadrato iscritto nel cerchio di raggio R, è $R \cdot \sqrt{2}$, ed il suo rapporto al raggio è $\sqrt{2}$.

2° Che il lato del quadrato circoscritto è $2R$, ed il suo rapporto al raggio è 2.

3° Che il lato del triangolo regolare iscritto è $R \cdot \sqrt{3}$, ed il suo rapporto al raggio è $\sqrt{3}$.

4° Che il lato del triangolo regolare circoscritto è R. $2\sqrt{3}$,
ed il suo rapporto al raggio è $2\sqrt{3}$.

5° che il lato dell'esagono regolare iscritto è eguale al raggio,
ed il suo rapporto allo stesso è 1.

6° Che il lato dell'esagono regolare circoscritto è R. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$,
ed il suo rapporto al raggio è $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

7° Che il lato del decagono regolare iscritto è R. $\frac{\sqrt{5-1}}{2}$
e quello del pentagono è R. $\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$.

Problema XXXII.

*Trovare il valore approssimato del rapporto
della circonferenza al diametro.*

Essendo data una circonferenza di raggio R, e poichè circonf.
circ. R
 $R = 2\pi R$ e cerchio $R = \pi R^2$ si avrà $\pi = \frac{\text{circ. R}}{2 R}$ e $\pi = \frac{\text{circ. R}}{R^2}$

adunque si hanno quattro metodi per trovare il valore di π , potendosi considerare il raggio, la circonferenza o l'area del cerchio come dati del problema (fig. 248).

Ora, se si prenda un quadrato che abbia un lato $AB=1$, evidentemente il perimetro dello stesso quadrato è eguale a 4. Denotando con R il raggio OA e con P l'apotema OC, si avrà a causa del triangolo rettangolo ed isoscele ACO, $P = \frac{1}{2}$, $AB = \frac{1}{2}$
ed $R = \sqrt{2 \cdot AC^2} = \sqrt{2 \times (\frac{1}{2})^2}$ ovvero $R = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ma il quadrato può trasformarsi in un ottagono regolare isoperimetro, quindi, giusta la dimostrazione del precedente problema, per l'apotema e pel raggio dell'ottagono si ha $P = \frac{1+\sqrt{2}}{4}$
ed $R = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{8}}$ e così potranno ancora calcolarsi l'apotema

e il raggio del poligono regolare isoperimetro di 16 lati, ed anche sino a giungerè ad un poligono il cui perimetro sarà sempre 4 ed il cui apotema P_n ed il raggio R_n differiranno fra loro di una qualsivoglia quantità più piccola. E perchè una circonferenza è sempre maggiore dei perimetri dei poligoni iscritti e minore dei perimetri dei poligoni circoscritti, le circonferenze descritte con P_n ed R_n sono l'una minore e l'altra maggiore di 4, dunque il raggio della circonferenza eguale a 4 è sempre compreso tra P_n ed R_n e si può ottenere con quella approssimazione che si desidera. Laonde il valore del raggio e dell'apotema d'un poligono regolare di 8192 lati, è pel primo 0.6366196, e pel secondo 0.6366196, quindi una circonferenza eguale a 4 ha per raggio 0.6366196, per conseguenza il rapporto della circonferenza al diametro proporzionato sino alla quinta cifra decimale inclusa, è

$$\pi = \frac{4}{2 \times 0.6366196} = \frac{40000000}{1.2732392} = 3.14159.$$

A meno di un centomillesimo.

ESERCIZI

I.

Teoremi da dimostrare

1° Un trapezio, è equivalente ad un rettangolo che ha per base la semisomma delle basi parallele del trapezio e la medesima altezza.

2° Un poligono convesso circoscritto ad un cerchio o regolare, è equivalente alla metà del rettangolo del perimetro e del raggio del cerchio iscritto.

3° Due parallelogrammi equiangoli ciascuno a ciascuno sono proporzionali ai rettangoli di due lati adiacenti, e sono equivalenti se i medesimi lati sono inversamente proporzionali.

4° Se si hanno due poligoni regolari equivalenti, ma che l'uno abbia un numero di lati doppio di quello dell'altro, sarà il raggio del primo poligono medio proporzionale fra il raggio e l'apotema del secondo poligono, e l'apotema del primo poligono media proporzionale fra l'apotema del secondo poligono e la semisomma del raggio e dell'apotema del detto secondo poligono.

5° Se si hanno due poligoni regolari, ma che l'uno abbia un numero doppio di lati di quello dell'altro ed isoperimetro rispetto

al precedente, sarà l'apotema del secondo poligono eguale alla semisomma del raggio e dell'apotema del primo poligono; ed il raggio del secondo poligono medio proporzionale fra il raggio del primo e l'apotema del secondo poligono.

6° In qualunque esagono iscritto al cerchio, i punti di concorso de'lati opposti, presi a due a due, sono tutti e tre in linea retta.

7° In qualunque esagono circoscritto al cerchio, le diagonali condotte dai vertici opposti, prese a due a due, si tagliano in uno stesso punto.

8° In un triangolo qualunque, la somma delle tre perpendicolari, condotte dal centro del cerchio circoscritto sui lati, è eguale alla somma dei raggi dei cerchi iscritto e circoscritto.

9° La distanza de'centri dei due cerchi l'uno iscritto e l'altro circoscritto a un triangolo, è media proporzionale tra il raggio del cerchio circoscritto e la differenza tra questo raggio e il diametro del cerchio iscritto.

II.

Problemi da risolvere

1° Sopra una data retta presa come base, costruire un triangolo simile ad un triangolo dato, resolvendo il problema in cinque modi distinti.

2° Costruire un quadrato equivalente ad un esagono dato.

3° Dato un triangolo, dividerlo in tre parti equivalenti con due rette condotte dal vertice alla base.

4° Tirare fra due lati di un triangolo una retta parallela ad un lato e che sia eguale ad un'altra retta data.

5° Dividere un triangolo in un numero qualunque di parti equivalenti con rette parallele ad uno dei lati.

6° Dividere un trapezio in un numero qualunque di parti equivalenti con rette parallele alle basi.

7° Costruire un triangolo, data l'area, la base ed il raggio del cerchio circoscritto.

8° Costruire un rombo, in modo che un lato sia medio proporzionale fra le diagonali.

9° Tirare da un punto preso in un angolo una retta in modo che la superficie del triangolo che essa forma coi due lati dell'angolo sia eguale a quella di un quadrato dato.

10° Su di una retta, data come ipotenus, descrivere il massimo triangolo rettangolo.

LIBRO QUINTO

OMOTETIA, DIVISIONE ARMONICA DELLE LINEE RETTE,
ASSE RADICALE DI DUE CERCHI

DEFINIZIONI

Due figure simili, diconsi *omotetiche*, se sono situate in modo che tutte le rette, che uniscono due punti corrispondenti, passano per uno stesso punto. Il punto d'incontro di queste rette chiamasi *centro di omotetia*, e le distanze fra lo stesso punto e quelli delle figure *raggi vettori*.

Due poligoni amotetici, sono direttamente disposti, se i punti corrispondenti dell'uno si trovano sui raggi vettori dell'altro; sono inversamente disposti, se i punti corrispondenti dell'uno, si trovano sui prolungamenti dei raggi vettori dell'altro.

Due figure omotetiche, per essere simili, hanno i lati paralleli e proporzionali — Il rapporto di similitudine è eguale a quello di due lati omologhi; quindi, le distanze che passano dal centro di omotetia ai punti dell'una figura sono tutte nella stessa direzione o in direzione opposta proporzionali alle distanze fra lo stesso punto di omotetia a quelli dell'altra figura, a seconda che i vertici di quest'ultima si troveranno sui raggi vettori dell'altra o sui prolungamenti dei stessi raggi.

I due poligoni ABC ed $A'B'C'$ simili (*fig. 249*), diconsi omotetici, perchè tutte le rette che uniscono due punti corrispondenti passano per lo stesso punto O , che chiamasi centro di omotetia. Le distanze OA , OA' , OB ,

OB' , OC , OC' sono detti raggi vettori. Epperò questi due poligoni sono inversamente disposti: perchè i vertici del secondo si trovano sui prolungamenti dei raggi vettori del primo, per conseguenza le distanze OA , OB , OC sono in direzione opposta proporzionali alle distanze OA' , OB' , OC' .

I due poligoni DEF , *def*, simili, sono parimente omotetici, perchè le rette che uniscono i loro vertici corrispondenti s'incontrano nello stesso punto O — questi due poligoni sono direttamente disposti, per essere i vertici del secondo situati sui raggi vettori del primo, quindi le distanze OD , OE , OF , sono nella stessa direzione proporzionali alle distanze *od*, *oe*, *of*.

Tre numeri formano una proporzione armonica, quando il primo sta al terzo, come la differenza del primo sul secondo, sta alla differenza del secondo sul terzo. Il secondo numero chiamasi medio armonico; per esempio, i tre numeri 12, 6, 4, danno luogo ad una proporzione armonica e si ha $12:4::12-6:6-4$.

Questa denominazione di *proporzione armonica*, viene dal perchè volendo far rendere ad una corda sonora i tre toni *do*, *mi*, *sol*, i quali formano nella musica l'accordo maggiore, bisogna far vibrare tre parti proporzionali ai suddetti numeri; dunque dati tre segmenti di rette, il primo maggiore del secondo, questo maggiore del terzo, ed in modo che il primo ed il terzo sono proporzionali all'eccesso fra il primo sul secondo, ed all'eccesso del secondo sul terzo, questi segmenti formano parimente una proporzione armonica.

La bisettrice di un angolo di un triangolo e quella dell'angolo esterno adiacente dividono armonicamente il lato opposto.

Se una retta AB (*fig. 250*) è divisa nei punti C , D , in segmenti proporzionali in modo che si ha $AD:AC::BD:BC$, le tre linee AD , AB , AC , formano una pro-

porzione armonica, dappoichè la precedente proporzione si può scrivere $AD:AC::AD-AB:AB-AC$, quindi la retta AB è divisa armonicamente nei punti C, D ; questi punti chiamansi *coniugati armonici* rispetto alla retta AB . Reciprocamente i punti A, B , dividono armonicamente la retta BD . Dunque i quattro punti A, B, C, D , formano ciò che chiamasi *sistema armonico*.

Quattro rette, che dividono armonicamente una trasversale qualunque formano un *fascio armonico*, ciascuna di essa prende il nome di *raggio* del fascio; le stesse rette prendono il nome di *conjugate armoniche* quando determinano sulla trasversale punti coniugati armonici.

Se da un punto A fuori di un cerchio BCD (fig. 251), si conducano ad esso due tangenti AC, AD e si tiri la retta CD , fra i punti di contatto, indi tirato il diametro BF e prolungato fino al punto A in modo che passi per la CD nel punto E , e condotto pel punto A una retta MN parallela a CD , il punto A chiamasi polo della retta CD rispetto al cerchio CBD ; la stessa retta CD dicesi *polare* del punto A . Similmente il punto E è *polo*, della retta MN , la quale è polare di E .

Dicesi *asse radicale* di due cerchi situati nello stesso piano, il luogo geometrico de' punti da ciascuno dei quali le tangenti condotte ai due cerchi sono eguali.

STEINER, ha chiamato potenza di un punto A rispetto a un cerchio, il prodotto costante $AD \times AE$ dei segmenti di una secante qualunque DE condotta dallo stesso punto A (fig. 252).

Epperò per distinguere i punti interni dai punti esterni del cerchio, si è convenuto dare il segno $+$ alla potenza $AD \times AE$ del punto A esterno al cerchio, ed il segno $-$ alla potenza $AD \times AE$ del medesimo punto A interno al cerchio.

Teorema I.

Ogni figura ha infinite omotetiche rispetto ad un punto dato.

Sia il quadrilatero $ABCD$, ed il punto dato O , dico che questo quadrilatero ha infinite omotetiche rispetto allo stesso punto O (*fig. 253*).

Infatti, si tirino le rette OA , OB , OC , OD , e si prendano su di esse quattro punti E , F , G , H , in modo che taglino queste rette in parti proporzionali; congiunti i medesimi punti per mezzo delle rette EH , HG , GF ed FE , il quadrilatero $EHGF$, è omotetico al quadrilatero $ABCD$, poichè ad ogni punto di una figura corrisponde un punto dell'altra, e ciascuna delle rette OA , OB , OC , OD , che unisce due punti corrispondenti passa per lo stesso punto O , centro d'omotetia, ed i segmenti determinati sulle stesse rette sono per costruzione proporzionali nella stessa direzione. Lo stesso può dirsi se si prendano similmente quattro altri punti I , M , N , L , e si costruisca il poligono $IMNL$; dunque resta dimostrato che ogni figura ha infinite omotetiche rispetto ad un punto dato.

Teorema II.

Due poligoni sono omotetici, se le rette che uniscono i vertici del primo ad un punto qualunque, sono parallele e proporzionali a quelle che uniscono i vertici del secondo ad un altro punto.

Siano i due poligono $ABCD$, ed $EFGH$, dico che sono omotetici, se le rette AM , BM , CM , DM , che uniscono i vertici del primo ad un punto M , sono parallele e proporzionali alle rette EN , FN , GN ed HN che uniscono i vertici del secondo ad un'altro punto N (*fig. 254*).

Si tiri la retta MN e si prolunghi fino ad un punto O, in modo che si abbia la proporzione $OM:ON::MD:NH$, e si unisca questo punto con i vertici D ed H. I due triangoli ODM ed OHN, avendo un angolo eguale ad un angolo, ciascuno compreso fra lati proporzionali sono equiangoli, quindi l'angolo ODM è eguale all'angolo OHN ed il lato OH coincide col lato OD. Nello stesso modo si prova che le rette OA ed OE, OB ed OF, OC ed OG coincidono; dunque il punto O è il centro di omotetia ed i due poligoni ABCD ed ECGH sono omotetici.

Scolio. L'omotetia è diretta, se sono dirette nello stesso verso le rette DM ed HN, è inversa in caso contrario — I punti M, N, si chiamano *poli coniugati* dei poligoni omotetici. Il centro d'omotetia ed i poli coniugati sono in linea retta.

Corollario. Se i due poligoni ABCD ed EFGH (*fig. 255*) sono omotetici ed inversamente disposti, il centro O di omotetia si trova sulla retta che unisce i poli coniugati e non sul prolungamento della stessa, quindi le rette DM ed HN sono dirette in senso contrario.

Teorema III.

Se due poligoni a centro sono omotetici diretti,
sono ancora omotetici inversi.

Se i due poligoni ABCD ed EFGH che hanno al centro i poli coniugati M, N, sono omotetici diretti, dico che essi sono ancora omotetici inversi (*fig. 256*).

Infatti essendo questi due poligoni omotetici diretti, il centro d'omotetia O' è situato sul prolungamento della retta che unisce i poli coniugati M ed N; quindi si avrà la proporzine $O'M:O'N::AM:EN$, come ancora $O'M:$

$O'N::CM:GN$ e per conseguenza $\frac{AM}{EN} = \frac{CM}{GN}$, ora ti-

rando le rette AG e CE esse si taglieranno nel punto O situato sulla retta MN; dall'essere i due triangoli ONE ed OMC equiangoli daranno la proporzione $OM:ON::CM:EN$, parimente i due triangoli equiangoli OGN ed OAM daranno la proporzione $OM:ON::AM:GN$, quindi

$$\frac{CM}{AM} = \frac{EN}{GN}$$

dunque le rette omologhe GN ed AM opposte pure CM ed EN essendo in verso contrario i due poligoni ABCD ed EFGH sono ancora omotetici inversi.

Ciò che si voleva dimostrare.

Scolio. La reciproca è evidente per se stessa, ed i due poligoni ABCD ed EFGH, che hanno al centro i poli coniugati hanno due centri di omotetia l'uno situato sul prolungamento della retta MN, quando sono omotetici diretti, e l'altro sulla stessa retta MN quando sono omotetici inversi.

Corollario. Se di due figure omotetiche l'una ha centro, anche l'altra ha centro, dappoichè i segmenti DM ed MB essendo eguali e in direzione opposta, anche i loro omologhi HN ed NF sono eguali ed in direzione opposta, dunque essendo M il centro della prima figura, N sarà quello della seconda.

Teorema IV.

Due poligoni omotetici ad un terzo sono omotetici fra loro, e tutte tre omotetie o sono dirette, o una diretta e due inverse.

Siano i due poligoni ABCD, ed A'B'C'D' omotetici al terzo A''B''C''D'' dico che sono omotetici fra loro e tutti tre o sono omotetici diretti, o uno diretto e due inversi.

Essendo O (fig. 257) il centro d'omotetia dei tre poligoni ABCD, A'B'C'D', A''B''C''D'' e poichè le rette BC, B'C' sono parallele alla terza B''C'', e le rette BD, B'D' sono parallele alla terza B''D'' si ha la proporzione $BC:B'C'::BD:B'D'$ come ancora $B''C'':B'C'::B''D'':B'D'$,

ovvero $\frac{BC}{B'C'} = \frac{BD}{B'D'}$ e $\frac{B''C''}{B'C'} = \frac{B''D''}{B'D'}$, per conseguenza

$B''C'':BC::B''D'':BD$, dunque le rette $C''D''$, $B''D''$ e $B''C''$ sono rispettivamente parallele e proporzionali alle rette CD , BD , BC e $C'D'$, $B'D'$, $B'C'$ ed i poligoni sono tutti e tre omotetici diretti fra loro.

Si è detto che l'omotetia può essere per tutti tre diretta nel caso che il centro d'omotetia sia lo stesso, è inversa nel caso che i lati omologhi sono in senso contrario, ma fra i sistemi omotetici che formano tre poligoni dati, non può avverarsi esclusivamente in tutti tre l'omotetia inversa, dappoichè se un poligono è omotetico diretto con un altro ed inverso col terzo, l'omotetia di questo poligono col secondo deve forzosamente essere inversa, in caso contrario l'omotetia non potrebbe essere inversa neanche col primo.

Teorema V.

Se due poligoni sono omotetici ad un terzo, i tre centri di omotetia sono in linea retta.

Se due poligoni $ABCD$ ed $FEGH$ sono omotetici al terzo $A'B'C'D'$ dico che i tre centri di omotetia O , O' , O'' sono in linea retta (*fig. 258*).

Si tiri la retta OO' , si prenda sulla stessa un punto O''' in modo che sia la retta FO''' parallela ad AO' ; i due punti $O'O'''$ sono poli coniugati dei due poligoni omotetici $ABCD$ ed $FEGH$. Or per essere i due poligoni $ABCD$ ed $A'B'C'D'$ omotetici inversi, i punti O' ed O'' sono benanche i poli coniugati di questi due poligoni, dunque O'' centro d'omotetia di essi trovasi sulla retta $O'O'''$ e per conseguenza i tre centri omotetici O , O' , O'' si trovano su di una medesima linea retta. Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema VI.

La linea omotetica di una circonferenza è un'altra circonferenza e due circonferenze sono sempre omotetiche direttamente ed inversamente.

La linea omotetica di una circonferenza ABC dico che è un'altra circonferenza DEF , e queste due circonferenze sono sempre omotetiche direttamente ed inversamente (*fig. 259*).

Infatti si tiri il diametro AC ed il diametro DF ; essendo O il centro di omotetia delle due circonferenze, per quello che precedentemente si è dimostrato, si avrà la proporzione $AO:OD::CO:OF$ dunque AO è una lunghezza costante, ed il luogo geometrico del punto D è una circonferenza che ha per centro il punto M omologo al punto N e per raggio MD parallelo ad NA .

Ora la retta AD incontrando la retta MN prolungata in O , e la retta DC incontrando la stessa retta MN in un punto R compreso fra i punti M ed N , le due circonferenze saranno omotetiche direttamente rispetto al punto O , ed inversamente rispetto al punto R ; quindi si avranno le proporzioni $ON:OM::NA:MD$ ed $RA:RF::NA:MF$, dunque i punti O ed R situati sulla retta ON si trovano in modo, che le loro distanze dai punti N ed M sono proporzionali ai raggi delle due circonferenze, ma da quanto si è detto $AO:OD::NA:MD$ ed $RA:RF::NA:MF$, per conseguenza, le due circonferenze sono omotetiche direttamente rispetto al punto O ed omotetiche inversamente rispetto al punto R .

Corollario 1° — Due archi AB e DE , che hanno i punti estremi omologhi, vale a dire che corrispondono ad angoli al centro eguali sono omotetici.

Corollario 2° — Le tangenti ai punti omologhi di due circonferenze omotetiche sono parallele, e le tangenti comuni a due

circonferenze passano o per l'uno o per l'altro dei centri di similitudine: quindi se una retta condotta per uno dei centri di omotetia non incontra una delle due circonferenze non incontra neppure l'altra.

Corollario 3° — Tre circonferenze omotetiche, hanno tre centri di omotetia diretta e tre di omotetia inversa, i primi si trovano situati in linea retta, come ancora si trovano sulla stessa retta il centro di omotetia diretta di due di essi, ed i due di omotetia inversa dei medesimi rispetto al terzo.

Teorema VII.

Se pel centro d'omotetia di due cerchi si tirano due seganti ai medesimi, tra gli otto punti d'intersezione, quattro qualunque non coniugati sono in una stessa circonferenza.

Se dal centro O d'omotetia di due cerchi $EDGF$ e $BCIH$, si tirano due seganti, dico che tra gli otto punti d'intersezione, quattro qualunque non coniugati, sono in una stessa circonferenza (*fig. 260*).

Infatti si ha per ipotesi $OB:OG::OC:OF$. Perchè i quattro punti D, G, F, E , appartengono alla circonferenza $DEFG$ si ha pure $OD:OG::OE:OF$; paragonando queste due proporzioni è visto che hanno gli stessi conseguenti, gli antecedenti staranno in proporzione, quindi $OB:OD::OC:OE$ dunque i punti D, B, C, E , sono in una medesima circonferenza.

Lo stesso è per i punti D, F, I, B , per E, G, H, C e per G, F, I, H che non sono fra loro omologhi.

Corollario. Se una delle due rette OC, OB girasse intorno al punto O in modo da coincidere esattamente sull'altra, ciascuna delle due circonferenze $DBCE, GHIF$ diverrebbe tangente alle due circonferenze date, e la retta che unisse i punti di contatto passerebbe pel centro di similitudine interno o esterno secondo che i punti di contatto sarebbero esternamente o internamente.

Teorema VIII.

Se si hanno tre punti in una retta, uno di essi si troverà compreso, o fuori del segmento determinato dagli altri due, secondocchè la distanza dallo stesso punto a quello medio del segmento determinato dagli altri due, sarà eguale alla semidifferenza o alla semisomma delle distanze dal medesimo punto agli altri due.

Se si hanno tre punti A, B, C in una retta, dico che uno di essi C, si troverà compreso, o fuori del segmento AB, determinato dagli altri due, secondocchè la distanza dallo stesso punto C al punto medio O, del segmento AB, sarà eguale alla semidifferenza o alla semisomma delle distanze dal punto C agli altri due A e B (fig. 264).

Infatti, si prenda una parte OD eguale ad OC nella direzione di OA, si avrà 2OC eguale a DC, ed AD eguale a BC. Il punto C si trova compreso fra il segmento determinato dalla retta AB per essere la distanza OC eguale

$AC - CB$
ad $\frac{AC - CB}{2}$; poichè essendo $DC = AC - CB$ ovvero
 $2OC = AC - CB$, prendendo la metà dall'una e dall'altra parte di questa eguaglianza risulta $OC = \frac{AC - CB}{2}$.

Lo stesso punto C si trova fuori del medesimo segmento AB per essere la distanza OC eguale ad $\frac{AC + CB}{2}$, poichè essendo $DC = AC + CB$ ovvero $2OC = AC + CB$ prendendo la metà dall'una e dall'altra parte di questa eguaglianza risulta $OC = \frac{AC + CB}{2}$.

Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema IX.

La metà di una retta è media proporzionale tra le distanze dal punto di mezzo di questa retta ai due punti che la dividono armonicamente; questi punti si trovano da una stessa parte del punto medio.

Sia il punto O, medio della retta AB, dico che il segmento AO è medio proporzionale tra le distanze OD ed OC dal punto di mezzo O della linea AB, ai due punti C, D, che la dividono armonicamente, e questi due punti si trovano da una stessa parte del punto O (*fig. 262*).

Infatti, dappoichè per definizione si ha $AD:AC::BD:BC$ ovvero $AD:BD::AC:BC$, si deduce che $AD+BD:AD-BD::AC+BC:AC-BC$; ma $AD+BD$ è eguale a $2OD$, $AD-BD$ è eguale a $2AO$, $AC+CB$ è eguale a $2AO$ ed $AC-CB$ è eguale a $2OC$, dunque $OD:AO::AO:OC$.

Dalla proporzione $AD:BD::AC:BC$ si vede che i punti C, D, si trovano da una stessa parte del punto medio O, poichè se AD è maggiore di BD, sarà ancora AC maggiore di BC; questo non potrebbe essere, se i punti C, D, non si trovassero da una stessa parte del punto O. Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Se due punti C, D, si trovano da una stessa parte del punto O medio della retta AB, e si ha la proporzione $OD:AO::AO:OC$ i quattro punti A, B, C, D, formano un sistema armonico ed A è coniugato con B, e C con D. Ma se per ipotesi, si negasse ciò, e si avesse il punto R coniugato armonico con C rispetto ad A e B, si troverebbero i punti R e D da una stessa parte del punto O e disuguali i segmenti OR ed OD, quindi non potrebbe aver luogo la proporzione $OR:AO::AO:OC$ se si sostituisse ad OR il suo disuguale OD.

Corollario. Dalla nota proporzione $AD:BD::AC:BC$ si deduce le serie di rapporti eguali

$$\frac{AD}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD-BD}{AC-BC} = \frac{AO}{OC}.$$

Elevando questi rapporti a quadrato e sostituendo ad AO^2 il suo valore $OD \times OC$ si avrà

$$\frac{AD^2}{AC^2} = \frac{BD^2}{BC^2} = \frac{OD}{OC}.$$

Teorema X.

In ogni fascio armonico una retta parallela ad uno dei raggi è divisa dagli altri tre in parti eguali.

Siano OA, OC, OD, OB i raggi di un fascio armonico dico che la retta FG parallela al raggio OA è divisa dagli altri tre OC, OD, OB in parti eguali, di modo che sarà $FE=EG$ (*fig. 263*).

Infatti dal punto d'incontro D del raggio OD colla retta AB si conduca IM parallela ad FG , e per conseguenza parallela ad AO . I due triangoli simili IDC ed OCA danno la proporzione $AC:CD::AO:ID$, similmente i due triangoli simili MDB ed OBA danno la proporzione $AB:DB::AO:DM$. Or per la divisione armonica della retta AB si ha la proporzione $AC:CD::AB:BD$, quindi $AO:ID::AO:DM$, dunque $ID=DM$ e per conseguenza anche FE è eguale ad EG . Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. Se i due raggi del fascio, OA ed OD (*fig. 264*), sono scambievolmente perpendicolari, essi dividono per metà l'altro angolo formato dagli altri due raggi OC ed OB , perchè i due triangoli rettangoli OEF ed OEG hanno un angolo eguale ad un angolo, ciascuno compreso fra lati rispettivamente eguali, e sono eguali; quindi OE è la bisettrice dell'angolo COB .

Scolio. Se si ha un angolo AOD e un punto B , condotta la trasversale BA , e fattala girare intorno al punto B il luogo geometrico del coniugato armonico di B rispetto ai due punti d'intersezione A e D de'lati del medesimo angolo AOD è il raggio OC coniugato armonico del raggio OA . Il punto B è il polo della retta OC , e questa, la polare dello stesso punto, rispetto all'angolo AOD .

Ogni punto ha una polare rispetto a due rette date, e qualunque retta ha infiniti poli situati in una retta, se forma un fascio armonico con le due date rette.

Teorema XI.

Reciprocamente se di quattro rette condotte da uno stesso punto tre di esse dividono in parti eguali una trasversale parallela alla quarta, queste quattro rette formano un fascio armonico.

Se di quattro rette OA, OC, OD, OB , condotte da uno stesso punto O , tre di esse OC, OD, OB dividono in parti eguali una trasversale IM parallela alla quarta OA , dico che queste quattro rette formano un fascio armonico (*fig. 263*).

Si conduca la retta AB pel punto medio D della trasversale IM a causa dei due triangoli simili OCA ed IDC si ha la proporzione $AC : CD :: AO : ID$. Similmente a causa dei due triangoli simili OAB ed MBD si ha la proporzione $AB : DB :: AO : DM$, ma per costruzione ID è eguale a DM , quindi si deduce $AC : CD :: AB : DB$. Epperò, per quanto finora si è dimostrato, quest'ultima proporzione indica che i punti A, C, D, B , formano un sistema armonico, dunque le quattro rette OA, OC, OD, OB condotte dallo stesso punto, delle quali tre OC, OD, OB dividono in parti eguali la trasversale IM parallela alla quarta OA formano un fascio armonico.

Corollario 1° — Dati tre raggi di un fascio armonico, si conosce il quarto, tirando una trasversale in modo che venga divisa da tre raggi in due parti eguali, e poscia si conduca pel punto di partenza dei medesimi raggi una retta parallela alla detta trasversale.

Corollario 2° — Qualunque retta che incontra i quattro raggi di un fascio armonico, viene da questi divisa armonicamente.

Corollario 3° — Due lati di un angolo, la bisettrice di esso, e quella del suo supplemento formano un fascio armonico, quin-

di un lato di un triangolo qualunque, viene diviso armonicamente dalla bisettrice dell'angolo opposto e da quelle del suo supplemento adiacente; per conseguenza le quattro rette di un fascio possono essere prolungate indefinitamente dall'una e dall'altra parte.

Teorema XII.

Se da un punto, si conducono in un angolo due trasversali qualunque, uniti a due a due i punti d'intersezione delle trasversali coi lati dell'angolo, il luogo geometrico delle intersezioni delle diagonali del quadrilatero formato dalle medesime trasversali e dai medesimi lati dell'angolo è la polare del punto di partenza delle trasversali.

Se da un punto A si conducono in un angolo BDC due trasversali qualunque AE, AF , uniti a due a due i punti d'intersezione F, G , ed E, H , dico che il luogo geometrico delle intersezioni delle diagonali del quadrilatero $EFHG$ formato dalle medesime trasversali, e dai medesimi lati dell'angolo, è la polare del punto A (fig. 265).

Sia I l'armonico coniugato di A rispetto ai due punti G, E , si conduca la retta OA ; le quattro rette OA, OG, OI, OE formano un fascio armonico; la medesima retta OA coi prolungamenti OF, OD, OH , delle rette OG, OI, OE , forma ancora un fascio armonico, quindi il punto d'intersezione M delle rette DI ed AF è il coniugato del punto A rispetto ad H ed F ; dunque, evidentemente la retta MOI è la polare di A , rispetto all'angolo BDC ed il punto O trovasi forzosamente su questa polare. Resta perciò dimostrato che il luogo del punto O , intersezione delle diagonali del quadrilatero $EFHG$ è la polare MOI del punto A dove partono le due trasversali AE ed AF .

Corollario. Chiamasi *quadrilatero completo* un sistema di quattro rette indefinite ABC, BDE, CDF, EFA (fig. 266), che si tagliano in sei punti A, B, C, E, D, F , i quali si dicono *vertici* del quadrilatero completo. Le diagonali di questo quadrilatero sono le tre rette AD, BF, EC , che uniscono due a due i vertici opposti.

Ciascuna di queste diagonali è divisa armonicamente dalle altre due, dappoichè essendo G polo di AD rispetto all'angolo BAF la diagonale CE viene divisa per mezzo delle altre due AD e BF armonicamente nei punti G , C , H , E . Similmente il punto A essendo polo di GD rispetto all'angolo BGC la diagonale AD rimane divisa per mezzo delle altre due BF ed EC armonicamente nei punti A , I , D , H . In ultimo formando le rette DF , DI , DB , prolungamenti di DC , DH , DE , con la retta DG un fascio armonico, la diagonale BF resta anche divisa per mezzo delle altre due CE , ed AD armonicamente nei punti F , I , B , G .

Teorema XIII.

Se da un punto in un triangolo qualunque si tirino ai vertici delle rette, e di ognuna si trova la coniugata armonica rispetto ai due lati del triangolo che formano fascio con essa, i punti d'incontro di due fra le tre rette e della coniugata della terza con i lati opposti, sono in una stessa retta.

Se dal punto O nel triangolo ABC si tirino ai vertici le rette OA , OB , OC , e di ognuna si trova la coniugata armonica rispetto ai due lati che formano fascio con essa, dico che i punti d'incontro di due fra le tre rette e della coniugata della terza con i lati opposti sono in linea retta (*fig. 267*).

Siano F , D , E , i punti d'incontro delle rette prolungate OA , OB , OC , coi lati del triangolo ABC , ed X , Y , Z , i coniugati armonici dei medesimi punti rispetto a C e B , B e A , A e C . Le rette AX , CY , BZ , saranno le coniugate di AF , CE , BD rispetto ad AC e AB , CB e CA , BC e BA . Or essendo la retta BD polare di Z rispetto ai lati BC e BA , ed il punto O della medesima polare congiunto coi punti C , A , ove la secante ZC condotta dal punto Z incontra questi lati, i punti Z , F , E , si troveranno sulla stessa retta ZE , dunque i punti F ed E delle due rette AO ed OC si troveranno in linea retta col punto Z della coniugata armonica di OB . Similmente i punti E , D , sono in linea retta con X , e i punti D , F con Y .

Ciò che volevasi dimostrare.

Scolio. Essendo Z polo di BD rispetto ai lati BC e BA , e poichè il punto D della polare BD , è congiunto con i punti F ed E ove la secante ZE incontra i detti lati BC e BA ne nasce che i punti X, Y, Z , sono in linea retta, quindi i tre punti d'incontro delle tre coniugate coi lati opposti sono in linea retta.

Corollario 1° — Una delle tre rette condotte dal punto in un triangolo ai tre vertici del medesimo e le coniugate delle altre due concorrono in uno stesso punto. Infatti essendosi dal punto X condotte ai lati AC , AB , le due secanti XC ed XZ , la retta AO prolungata incontrerà le coniugate CY e BZ delle due rette OC , OB nel punto M .

Corollario 2° — I punti d'incontro delle bisettrici degli angoli esterni di un triangolo coi lati opposti sono in linea retta, come ancora sono in linea retta i punti d'incontro delle bisettrici di due angoli esterni e dell'angolo interno, non adiacente ad essi, coi lati opposti.

Teorema XIV.

Se due punti dividono armonicamente il diametro di un cerchio, il rapporto della distanza dei medesimi punti a quello d'incontro del fascio armonico sulla circonferenza è costante.

Se due punti C e D dividono armonicamente il diametro AB del cerchio AOB , dico che il rapporto delle distanze OC e CD dai medesimi punti al punto O d'incontro del fascio sulla circonferenza è costante (*fig. 268*).

I quattro punti A, C, B, D , dividendo armonicamente la retta AD , le rette OA, OC, OB, OD , formeranno un fascio armonico; quindi il punto O , sulla circonferenza essendo il punto d'incontro del fascio e le due coniugate OA e OB , essendo scambievolmente perpendicolari, la retta OB sarà la bisettrice dell'angolo COD , per conseguenza si avrà la proporzione $OC:OD::CB:BD$, dunque

il rapporto $\frac{OC}{OD}$ è costante.

Corollario. Il luogo geometrico dei punti tali, che il rapporto della distanza da ciascuno di essi e due punti fissi C, D , sia costante è la circonferenza descritta col raggio eguale alla metà della distanza dei due punti coniugati A e B , che dividono armonicamente la retta che passa fra i punti C e D , secondo il rapporto dato.

Teorema XV.

Se per un punto si conduca una secante qualunque ad un cerchio, il luogo del punto coniugato armonico di quello dal quale si è condotto la secante rispetto ai due punti d'intersezione della secante con la circonferenza, è una retta perpendicolare al diametro.

Se per un punto O , si conduca una secante qualunque OA ad un cerchio, dico che il luogo del coniugato armonico del punto O , rispetto ai due punti d'intersezione A, B , della secante con la circonferenza, è una retta CD perpendicolare al diametro GH (fig. 269).

Infatti, se per ipotesi il punto D è il coniugato armonico di O rispetto ai punti G ed H del diametro GH , la retta DC è perpendicolare a questo diametro; dappoi- ché, essendo i punti D, O , coniugati rispetto ai punti G, H , ed appartenendo i punti A, B , alla circonferenza, si ha la proporzione $DB:BO::AD:AO$, quindi dall'es-

$$\frac{DB}{BO} = \frac{AD}{AO}$$
 sere — la retta DO è la bisettrice dell'angolo

IDB , esterno del triangolo DAB , dunque le quattro rette DO, DB, DC, DA , formano un fascio armonico, e le rette DC e DO sono scambievolmente perpendicolari; per conseguenza, il luogo geometrico del punto C , è sulla perpendicolare DC tirata sul diametro GH dal punto D , coniugato del punto O , rispetto a G ed H . Ciò che volevasi dimostrare.

Corollario. La polare del punto O esterno al cerchio, è la retta che unisce i punti di contatto delle due tangenti che si pos-

sono tirare da questo punto alla circonferenza. Se lo stesso punto O è sulla circonferenza, la polare si confonderà colla tangente che passerà per esso. In ultimo se il punto O è nell'interno della circonferenza, la polare si trova fuori del cerchio e si allontana sempre più dal centro a misura che il medesimo punto più se ne avvicina.

Teorema XVI.

Le polari dei punti di una retta, rispetto ad un cerchio, passano pel polo di questa retta. Reciprocamente i poli delle rette che passano per uno stesso punto si trovano sulla polare di questo punto.

La polare DP del punto C di una retta CB rispetto al cerchio GEF , dico che passa pel punto P polo della retta CB (*fig. 270*).

Infatti, la retta PD essendo polare del punto C è perpendicolare alla retta AC , quindi i due triangoli ABC ed ADP avendo l'angolo ADP eguale ad ABC perchè retti e l'angolo A di comune sono equiangoli e perciò simili, quindi si ha la proporzione $AD : AB :: AP : AC$, per conseguenza $AD \times AC = AB \times AP = AE^2$, dunque la retta DP è la polare del punto C e passa pel polo della retta CB .

Reciprocamente la retta DP che passa pel polo P ha il suo polo sulla retta CB polare di P .

Infatti tirata la retta AC perpendicolare a DP i due triangoli ABC ed ADP che come sopra si è dimostrato sono equiangoli danno la medesima proporzione e quindi la medesima eguaglianza $AD \times AC = AB \times AP = AE^2$; dunque la retta DP ha per polo il punto C situato sulla retta CB polare del punto P .

Corollario. Se da un punto qualunque si tirino due secanti ad un cerchio, le tangenti tirate dai punti di contatto di ciascuna delle due secanti col cerchio, s'incontreranno sulla polare del detto punto.

Teorema XVII.

Se per un punto si conduca una coppia di secanti qualunque ad un cerchio, ed unendo due a due i punti d'intersezione il luogo geometrico di due punti M, M' , è la polare del punto di partenza della coppia di secanti.

Se per un punto O si conduca una coppia di secanti qualunque ad un cerchio, ed unendo due a due i punti d'intersezione cioè D, A , e C, B , oppure A, B , e C, D , dico che il luogo geometrico dei due punti M, M' , è la polare EF del punto O (fig. 274).

Sia il punto F coniugato armonico di O rispetto ai due punti B e D le quattro rette MB, MF, MD, MO formano un fascio armonico, quindi il punto E d'intersezione del prolungamento di MF con AC è il coniugato di O rispetto ai punti A, C , dunque la retta EF è la polare del punto O . Similmente prolungando le rette AB, EF e CD esse s'incontreranno nel punto M' , per conseguenza per ciò che ora si è detto anche il punto M' si troverà sulla polare del punto O . Ciò che volevasi dimostrare.

Teorema XVIII.

La potenza di un punto rispetto a un cerchio, è eguale alla differenza fra il quadrato della distanza da questo punto al centro ed il quadrato del raggio.

La potenza di un punto A rispetto al cerchio BCD , dico che è eguale alla differenza fra il quadrato della distanza AO ed il quadrato del raggio OB .

Primo. Sia il punto A esterno al cerchio BCD (fig. 272). Si tiri la tangente AB , la potenza di A è eguale a $+AB^2$. Ora essendo il triangolo OBA rettangolo si avrà $AB^2 = AO^2 - OB^2$, dunque la potenza di A è eguale alla differenza del quadrato del raggio OB e del quadrato della distanza AO , dal punto A al centro.

Secondo. Sia il punto A interno al cerchio BGD (fig. 275). Si tiri la retta BC in modo che passi pel punto A e sia perpendicolare al raggio OD. La potenza dello stesso punto A è eguale a $-AB^2$, poichè a causa del triangolo rettangolo BAO si ha parimente $AB^2 = OA^2 - OB^2$. Dunque resta dimostrato che la potenza di un punto rispetto a un cerchio è eguale alla differenza fra il quadrato della distanza da questo punto al centro ed il quadrato del raggio.

Teorema XIX.

Il luogo geometrico dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a due cerchi, è una retta perpendicolare a quella che passa pei centri.

Siano i due cerchi O ed O', dico che il luogo geometrico dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a questi due cerchi è una retta MN perpendicolare ad OO' che passa pei centri. Questi due cerchi possono essere tangenti, interni o esterni, oppure possono tagliarsi.

Primo. Se i due cerchi sono tangenti (fig. 274) un punto qualunque N, della tangente NM comune ai due cerchi, ha la stessa potenza $+NM^2$ rispetto ad ABC e DEF. Ma se per contrario si avesse un punto qualunque A', esterno alla tangente si avrebbe $A'M \times AE$ maggiore di $A'M \times AA'$, lo che è contro l'ipotesi, dunque la retta MN è il luogo geometrico richiesto.

Secondo. Se i due cerchi sono interni o esterni, e sia N uno dei punti del luogo (fig. 275), si conduca NM perpendicolare alla retta OO' che passa pei centri dei due cerchi; nel triangolo rettangolo OMN si avrà $ON^2 = NM^2 + MO^2$ quindi la potenza di N rispetto al cerchio O è eguale ad $NM^2 + OM^2 - OA^2$. Similmente nel triangolo rettangolo O'MN si avrà $O'N^2 = NM^2 + MO'^2$, dunque la potenza di N rispetto al cerchio O' è eguale ad $NM^2 + O'M^2 - OB^2$ donde si deduce che $OM^2 - OA^2 = O'M^2 - O'B^2$ per

conseguenza il punto **M** è anche un punto di eguale potenza e non può essere che il solo situato sulla retta OO' e la retta NM è il luogo geometrico richiesto.

Terzo. Se i due cerchi si tagliano (*fig. 276*), qualunque punto della sola retta NM , che unisce i punti d'intersezione **M**, **B**, ha la stessa potenza $\pm NM \times BN$. Ma se ciò si negasse, e si avesse il punto **F** fuori delle rette NM , tirata la secante FBH si avrebbe $FB \times FH$ maggiore di $NM \times BN$, lochè è contro l'ipotesi, dunque resta dimostrato che il luogo geometrico dei punti che hanno la stessa potenza rispetto a due cerchi, è una retta perpendicolare a quella che passa pei centri.

Teorema XX.

Se tre cerchi non hanno i centri in linea retta, gli assi radicali di essi, considerati due a due, concorrono nello stesso punto.

Siano **A**, **B**, **C**, i centri di tre cerchi non in linea retta, dico che gli assi radicali OM , ON , OX di essi, considerati due a due concorrono in uno stesso punto (*fig. 277*).

Infatti i due assi radicali OM ed ON essendo rispettivamente perpendicolari alle due rette AB e BC che passano pei centri **A**, **B**, **C** dei cerchi, considerati due a due, s'incontrano nello stesso punto **O** di eguale potenza pei tre cerchi, nè può esservene altro, quindi esso è situato ancora sull'asse radicale dei due cerchi **A**, **C**, per conseguenza OX è anche perpendicolare ad AC .

Corollario. Il centro radicale, che è il punto d'intersezione degli assi radicali di tre cerchi, serve a costruire l'asse radicale di due cerchi **A** e **B** esterni, oppure interni l'uno all'altro. Epperò il punto **M** dell'asse radicale OM dei medesimi due cerchi **A** e **B** si troverà situato fra i due centri allorquando i cerchi sono esterni l'uno all'altro, mentre che se i due cerchi fossero interni, esso si troverebbe situato sul prolungamento della retta AB e dalla parte del centro **B** del cerchio interno.

ESERCIZI

1° Se un diametro di un cerchio è diviso armonicamente in due punti e per questi punti s'innalzino due perpendicolari allo stesso diametro, qualunque tangente al cerchio incontra le due perpendicolari in due punti tali che il rapporto delle distanze da questi punti al centro è costante.

2° Il punto di contatto di una tangente e i tre punti nei quali viene la stessa incontrata da due altre tangenti e dalla retta che passa pei loro punti di contatto formano un sistema armonico.

3° Se due quadrilateri sono l'uno iscritto e l'altro circoscritto ad uno stesso cerchio, in modo che i vertici del primo sieno punti di contatto dei lati del secondo, le diagonali di questi due quadrilateri si tagliano in uno stesso punto polo della retta in cui sono situati i punti di concorso dei lati opposti dei medesimi quadrilateri.

4° In qualunque quadrilatero iscritto, il punto d'incontro delle diagonali e i punti di concorso dei lati opposti formano un triangolo e ciascuno de' tre vertici è polo del lato opposto.

5° Tutte le circonferenze che hanno i loro centri sopra una medesima retta e che tagliano ad angolo retto una data circonferenza hanno lo stesso asse radicale, e le dette circonferenze prese due a due hanno anche lo stesso centro radicale.

6° Date tre rette di un fascio armonico, trovare la quarta.

7° Dividere una retta armonicamente nel medesimo rapporto di due rette date.

8° Trovare il polo di una retta e la polare di un punto rispetto ad un cerchio.

FINE

ERRORI

CORREZIONI

Pag. 6 verso 33 un poligono
 » 8 » 8 estremità OR
 » 51 » 29 AB e DC
 » » » 30 AB e DC
 » » » 32 AD e BC
 » » » 33 AD e BC
 » 54 » 25 FGF
 » 60 » 27 combacia
 » 67 » 7 NH +
 » 74 » 18 abbia
 » 75 » 18 minuti primo
 » 78 » 22 BC — FE

Leggi un poligono regolare
 » estremità O, R,
 » AD e BC
 » AD e BC
 » AB e DC
 » AB e DC
 » FGE
 » combaciasse
 » NH =
 » avesse
 » minuti primi
 » BC — FE

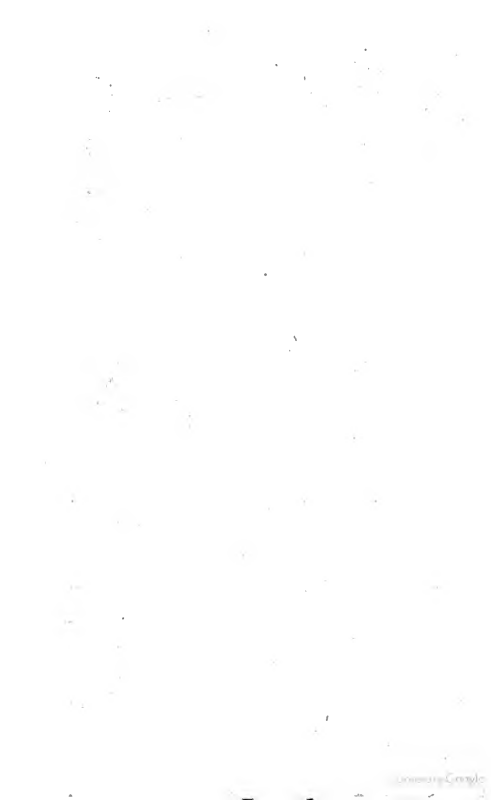
2

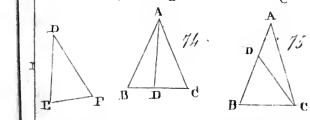
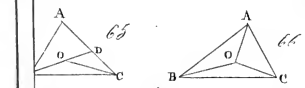
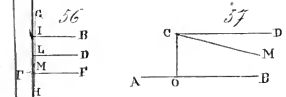
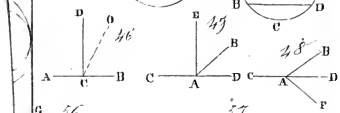
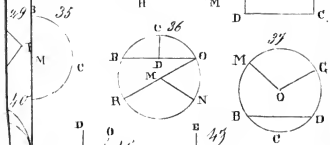
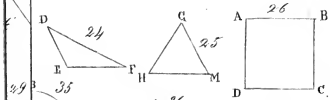
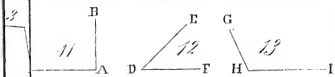
» 80 » 10 IK *non deve leggersi*

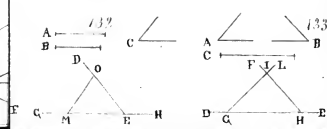
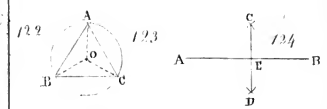
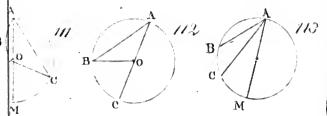
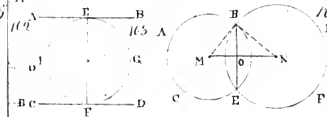
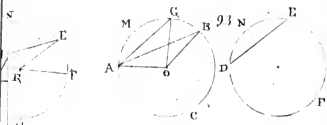
» 82 » ult. SI, IU
 » 85 » 5 descrivino
 » » » 7 »
 » » » 23 »
 » 90 » 7 ad A
 » 93 » 21 DE
 » 104 » ult. la metà
 » 106 » 30 ed FO, ed IP
 » 107 » 12 eguale base
 » 108 » 17 7.00
 » 124 » 26 ed AC
 » 126 » 16 X CN
 » » » 29 il triangolo
 » 135 » 29 ONCO
 » 136 » 27 stesso angolo
 » 147 » pen. è eguale
 » 154 » 18 de' poligoni
 » » » 19 della loro
 » 161 » 14 PONMLH
 » » » 23 »
 » 162 » 8 (fig. 214)
 » 166 » 9 punto H
 » 174 » 10 (fig. 233)
 » 176 » 6 condotta ai
 » 181 » 16 innalzato
 » 183 » 11 AN
 » 191 » 6 BD
 » 193 » 10 ECGH
 » 200 » 30 OA

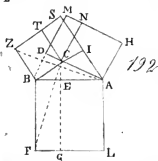
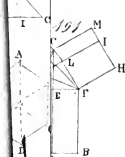
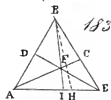
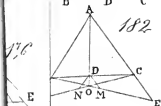
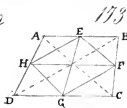
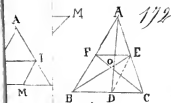
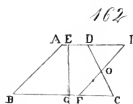
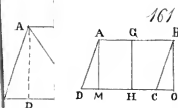
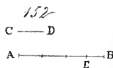
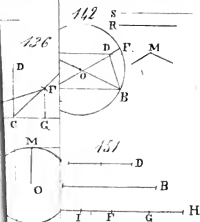
Leggi ST, TU
 » descrivano
 » »
 » »
 » a C
 » DA
 » il doppio
 » ad FO ad IP
 » eguali basi
 » 8.00
 » e BC
 » X ND
 » il triangolo ADB
 » ONCQ
 » stesso triangolo
 » eguale
 » de' perimetri dei poligoni
 » delle loro
 » PONMLQ
 » »
 » (fig. 213)
 » punto N
 » (fig. 232)
 » condotte ai
 » innalzata
 » AF
 » CD
 » EFGH
 » OB

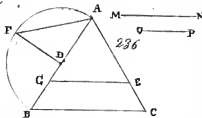
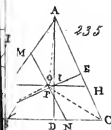
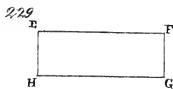
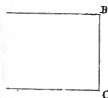
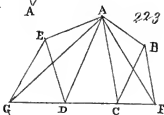
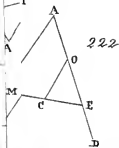
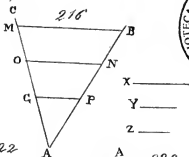
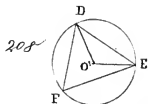
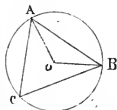
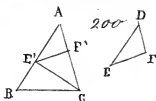
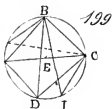
Aol 1462390

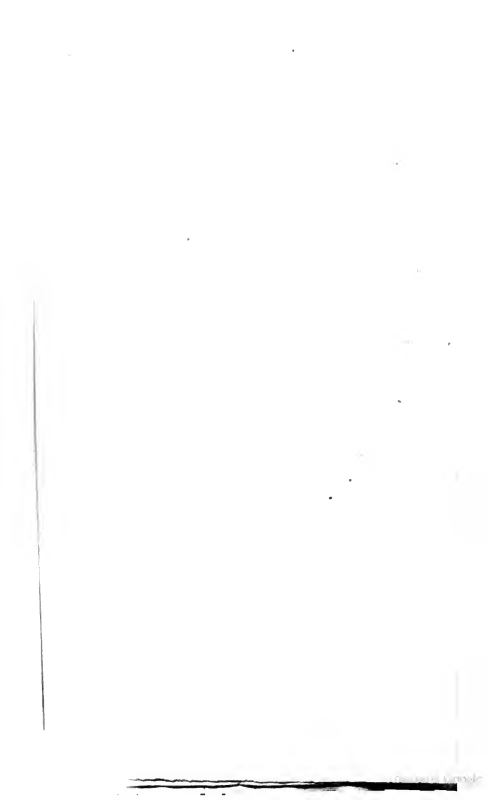


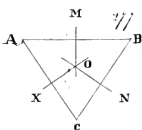
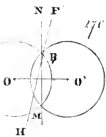
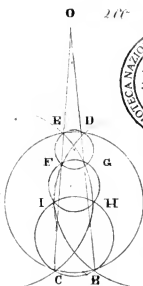
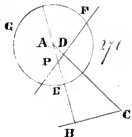
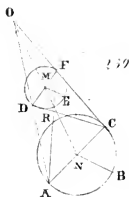
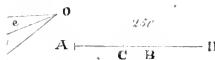
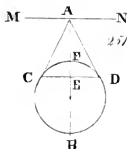
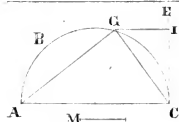






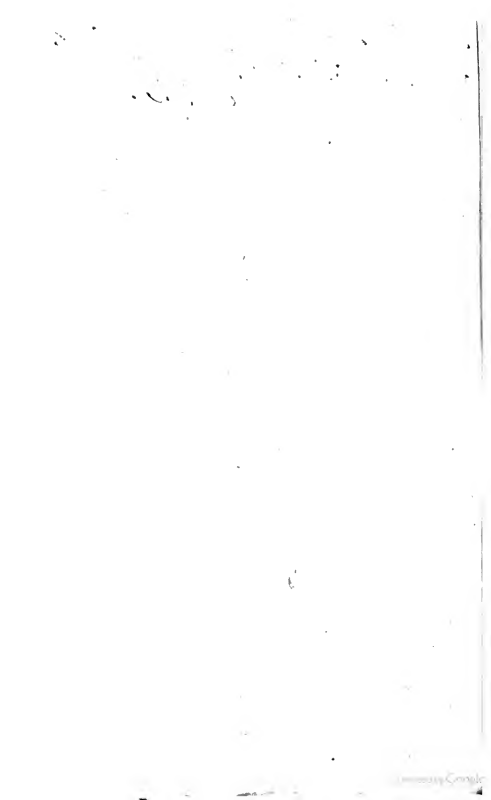












Testato con cinque Tav. - verificato
add: 17 febbraio 1875
J. Cavigli

